

中国科学技术大学
博士学位论文



宇称破缺引力理论
与双黑洞系统的引力辐射

作者姓名: 李钊
学科专业: 天体物理学
导师姓名: 赵文教授
完成时间: 二〇二五年五月十四日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



**Parity-violating gravity and
gravitational radiation of binary
black holes**

Author: Zhao Li

Speciality: Astrophysics

Supervisor: Prof Wen Zhao

Finished time: May 14, 2025

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所提交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名： _____

签字日期： _____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 控阅 (____ 年)

作者签名： _____

导师签名： _____

签字日期： _____

签字日期： _____

摘要

对宇称对称性的检验是引力物理中的一个重要研究课题。作为宇称破缺引力理论的典型代表，动力学 Chern-Simons (dynamical Chern-Simons, dCS) 引力近年来受到了广泛关注。诸多研究通过太阳系人造卫星数据和脉冲双星观测提出了对耦合常数的限制；然而，这些限制均远远超出弱耦合近似的适用范围，缺乏实际物理意义。近年来，引力波的成功探测为引力理论的检验提供了新的窗口。然而，由于 dCS 理论的修正极其微弱，采用基于准圆轨道的双黑洞波形模板进行的引力波观测同样无法对 dCS 理论作出有效约束。相关研究表明，即使对于未来的引力波探测器，限制 dCS 引力仍是一项相当困难的任务。由于引力波的信号提取和参数估计依赖于波形模板的精确度，因此进一步优化波源建模和波形模板的构建，有助于增强对修改引力理论的约束力度，从而实现对引力宇称对称性的更加精确的检验。本文的主要目标是在 dCS 引力框架下，将轨道偏心率和自旋进动效应引入双黑洞系统的演化与辐射计算，从而对引力波形模板做出进一步的改进。

本文第一部分对 dCS 理论进行了系统的回顾，包括作用量、引力场方程、引力波的振幅双折射效应、孤立慢转动黑洞解、线性化引力场方程以及自旋粒子在弯曲背景时空中的运动方程 [即 Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) 方程] 等，这些构成了后续理论计算的基础。

随后，本文第二部分在后牛顿近似框架下系统研究了双黑洞系统的运动和引力辐射。通过对 MPD 方程的约化，得到了精确到 2PN 阶次的运动方程；同时，利用线性化引力场方程的多极展开和远场积分，推导出了标量辐射和引力辐射的一般表达式。在 dCS 理论中，双黑洞相对运动的修正出现在 2PN 阶次，而自旋进动的修正则出现在 0.5PN 阶次。这些修正项包括双黑洞之间的自旋-自旋耦合和单极-四极耦合两种模式，其中前者源自双黑洞标量场之间的相互作用，后者则源自 Dixon 四极矩与弯曲背景之间的相互作用。

在完成一般讨论后，本文进一步讨论了特定天体物理情形下双星系统的动力学演化及其引力波信号。第三部分首先关注自旋平行的双黑洞系统，即天体的自旋矢量均与轨道角动量方向平行或反平行。此时，双黑洞不存在进动效应，其轨道角动量保持守恒，相对运动局限于一个固定平面内。在 dCS 理论框架下，我们推广了适用于双星系统的准开普勒参数化方案，并给出了运动的解析描述以及守恒部分的引力波形。通过 Newman-Penrose 形式分析，我们发现在远场区域，标量辐射与引力辐射解耦，因此引力波仅呈现两种张量极化模式，同时也导致振幅双折射等宇称破缺效应不会出现。随后，我们推导了自旋平行双黑洞系统

在一般平面运动情况下的引力波形及其对应的辐射反作用；最后，在小偏心率近似下，借助 Fourier 变换和稳态相位近似，得到了可直接用于引力波观测的频域信号。通过对 dCS 波形与广义相对论波形之间不匹配度的估计，我们发现，引入偏心率能够改善引力波观测对宇称破缺引力的约束能力，但对于第二代引力波探测器而言，这仍是一项相对困难的任务。

本文第四部分对 dCS 引力中同时带有轨道偏心率和自旋进动的双黑洞系统进行了初步研究。这样一个系统的总体运动可以分解为轨道平面的进动和天体在一个轨道平面内的运动两个部分，前者可以通过求解进动方程得到；对于后者，我们推广了进动系统的准开普勒参数化方案，并基于参数化解构建出守恒部分的引力波形。通过轨道角动量相对总角动量的章动，dCS 效应以振幅修正的形式进入 0.5PN 阶次；通过轨道角动量方位角的漂移以相位修正的形式进入 1PN 阶次；通过自旋角动量的演化以相位修正的形式进入 2PN 阶次。低阶后牛顿修正会放大 dCS 波形与广义相对论的差别，从而提高对引力宇称对称性检验的能力。此外，由于标量单极辐射的存在，零偏心率轨道在辐射反作用下不再稳定，导致双星在辐射演化末期存在一个残余的偏心率。这一效应可能成为未来观测中区别广义相对论和 dCS 理论的一个判据。

关键词：引力的宇称对称性 双黑洞系统 后牛顿近似 引力辐射

ABSTRACT

The tests of parity-symmetry constitute a critical aspect in gravitational physics. As a representative parity-violating theory, dynamical Chern-Simons (dCS) gravity has attracted significant attention in recent years. Several constraints on the dCS coupling constant have been proposed from solar-system experiments and binary pulsar observations. However, such constraints cannot meet the requirements of the small-coupling approximation, indicating that dCS gravity remains unconstrained. The successful detection of gravitational waves (GWs) offers a novel channel for testing gravity. However, due to the extremely weak modification induced by dCS gravity under the quasi-circular orbit approximation, current GW observations of binary black hole (BBH) systems remain ineffective in constraining this theory. It is also challenging for even the third-generation GW detectors to achieve meaningful dCS bounds. Since GW parameter estimation relies on the accuracy of waveform templates, improvements in wave source modeling and waveform construction are essential to enhance constraints on parity-violating gravity. This thesis aims to advance BBH waveform templates in dCS gravity by incorporating orbital eccentricity and spin precession effects.

We begin by systematically reviewing the theoretical foundations of dCS gravity, including its action, field equations, amplitude birefringence effects in GWs, isolated slowly rotating black hole solutions, linearized field equations, and the Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) equations governing the motion of spinning particles. These provide the basis for subsequent theoretical analyses.

Within the post-Newtonian (PN) framework, we investigate the equations of motion and gravitational radiation of BBH systems in general. The 2PN equations of motion are reduced from the MPD equations, and the scalar and gravitational radiation are computed via multipole expansion and far-zone integration. The dCS corrections emerge at 2PN order for orbital motion and 0.5PN order for spin precession, manifesting as spin-spin couplings and monopole-quadrupole couplings. The former arises from the interaction between the scalar fields of the objects, while the latter results from the interaction between the Dixon quadrupole and the background curvature.

Focusing on spin-aligned BBH systems, where spins remain parallel or antiparallel to the orbital angular momentum, we extend the quasi-Keplerian parametrization to dCS gravity. Analytical scalar and gravitational waveforms are derived, and radiation-reaction effects are analyzed. Newman-Penrose analysis confirms that far-zone GWs

retain only tensorial polarizations, with parity-violating amplitude birefringence absent. Frequency-domain waveforms under small-eccentricity approximation are computed using Fourier transforms and stationary phase approximation. Mismatch analyses reveal that eccentricity marginally improves dCS constraints but remains challenging for current GW detections.

Finally, we explore BBH systems with eccentric orbits and spin precession, decomposing their motion into the precession of the orbital plane and in-plane dynamics. By generalizing the quasi-Keplerian parameterization, we construct conservative waveforms incorporating dCS corrections: 0.5PN amplitude modulations from the nutation of orbital angular momentum, 1PN phase modulation from the azimuthal shift of orbital angular momentum, and 2PN phase modulations from the evolution of spin vector. Lower-order PN corrections amplify the differences between the waveforms predicted by dCS gravity and by general relativity, potentially enhancing parity-symmetry tests. Notably, scalar monopole radiation breaks the stability of zero-eccentricity orbits, inducing residual eccentricity during the late inspiral phase, which may serve as a signature to distinguish dCS gravity from general relativity in future GW observations.

Key Words: Gravitational parity-symmetry, binary black holes, post-Newtonian approximation, gravitational radiation

目 录

第 1 章 前言	1
1.1 广义相对论及其实验验证	1
1.2 引力波理论和探测	3
1.3 超越广义相对论和宇称破缺引力理论	8
1.3.1 Riemann 几何框架中的宇称破缺引力	9
1.3.2 非 Riemann 几何框架中的宇称破缺引力	10
1.4 本文内容与结构	11
第 2 章 Chern-Simons 引力和宇称破缺	15
2.1 作用量和引力场方程	15
2.2 振幅双折射和宇称破缺的检验	16
2.2.1 引力波在宇宙背景时空中的传播	16
2.2.2 通过振幅双折射对宇称破缺的检验	19
2.3 孤立黑洞解、太阳系和脉冲双星检验	20
2.3.1 弱耦合与慢转动近似	21
2.3.2 慢转动黑洞的求解	22
2.3.3 黑洞的时空和多极结构	24
2.3.4 太阳系观测	26
2.3.5 脉冲双星 PSR J0737-3039 观测	27
2.4 线性化引力场方程	28
2.4.1 扰动的定义	28
2.4.2 场方程的线性和二阶扰动	29
2.5 自旋粒子在弯曲时空中的运动	31
2.5.1 协变旋转张量	31
2.5.2 Lagrange 函数	32
2.5.3 变分原理、运动方程和能量动量张量	35
2.6 本章小结	38
第 3 章 dCS 引力下的双黑洞系统：运动方程和引力辐射	39
3.1 后牛顿近似	39
3.1.1 时空分区	39
3.1.2 后牛顿理论的发展与现状	40
3.1.3 关于线性化引力场方程结构的讨论	43

3.2	近场区域引力场的后牛顿解	43
3.2.1	标量场	43
3.2.2	引力场	45
3.3	双黑洞系统的后牛顿动力学	47
3.3.1	运动方程	47
3.3.2	自旋进动	50
3.3.3	双黑洞系统的机械能和轨道角动量	51
3.4	标量辐射	52
3.5	引力辐射	55
3.6	本章小结	58
第 4 章	dCS 引力下的双黑洞系统：自旋平行情形	59
4.1	准开普勒参数化	59
4.2	引力波极化	64
4.2.1	Newman-Penrose 标架和引力波极化	64
4.2.2	圆轨道双星辐射过程中的引力波极化	65
4.3	自旋平行双黑洞系统在做一般平面轨道运动时的引力波形	67
4.4	辐射反作用	70
4.4.1	能流	70
4.4.2	角动量流	74
4.4.3	轨道衰减	76
4.5	小偏心率展开下的频域波形	78
4.5.1	波形作为平近点角的函数	79
4.5.2	频域波形：方法概述	82
4.5.3	频域波形：结果	83
4.6	基于引力波观测对宇称破缺的检验	85
4.6.1	圆轨道极限与后爱因斯坦参数	85
4.6.2	LIGO/Virgo/KAGRA 引力波观测	86
4.6.3	未来引力波探测器对 dCS 理论的约束能力	88
4.6.4	偏心率对引力波观测约束的影响	89
4.6.5	多信使观测与目前 dCS 引力的最紧约束	91
4.7	本章小结	93
第 5 章	dCS 引力下的双黑洞系统：自旋进动情形	95
5.1	自旋进动系统的几何描述	95
5.1.1	基本系、轨道系和共进动基本系	95

5.1.2	轨道运动的几何描述	98
5.1.3	自旋进动的几何描述	99
5.2	周期平均化轨道角动量作为守恒量	100
5.3	改进的准开普勒参数化	102
5.4	守恒部分的引力波形	105
5.5	辐射反作用和残余偏心率	107
5.6	本章小结	110
第 6 章	结论与展望	111
	参考文献	114
附录 A	关于论文中涉及的复杂表达式的补充材料	133
A.1	慢转动黑洞 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2)$ 阶扰动方程及其求解	133
A.2	对旋转张量 $\Omega^{\mu\nu}$ 的变分	134
A.3	频域波形中的振幅修正	135
A.3.1	广义相对论部分	135
A.3.2	dCS 修正部分	136
A.4	进动双星引力和标量辐射表达式中涉及的系数	138
A.4.1	波形 $\xi_{+,x}^{(0)}$ 中涉及系数的表达式	138
A.4.2	自旋-自旋耦合项中的系数 $\mathcal{A}_k^{+,x}, \mathcal{B}_k^{+,x}$	139
A.4.3	单极-四极耦合项中的系数 $\mathcal{C}_k^{+,x}, \mathcal{D}_k^{+,x}$	143
	致谢	148
	在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	149

插图清单

图 1.1	引力波 + 模式和 \times 模式的观测效应。	4
图 1.2	引力波信号数据分析管线, 该图引自 ^[31] 。	6
图 1.3	引力波事件 GW150914, 该图引自 ^[42] 。引力波信号可以明显地区分为“旋近”、“并合”和“铃宕”三个阶段。	7
图 2.1	Yagi & Yang ^[108] 通过 Fisher 矩阵分析给出的对参数 $\bar{\xi}_0$ 约束上限 (1σ) 的概率密度分布。图中横轴与我们讨论的 $\bar{\xi}_0$ 一致, 原文中将系数 $16\pi\alpha$ 吸收到了标量场背景 \mathfrak{d}_0 中。	20
图 3.1	时空分区。本文仅考虑对一个孤立的双黑洞系统的引力波观测, 因此将整个时空划分为四个部分——内场区域、近场区域、远场区域和传播区域。黄色圆形代表了区域间的大致分界, 但这不是严格的。背景图片来自 LIGO 网站: https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160615f 。 ..	40
图 3.2	后牛顿展开、微扰论和数值相对论的适用范围。横轴代表了双星质量比的量级, 其中 m_1, m_2 代表双星各自的质量。纵轴代表了引力势的强度, m 是双星系统总质量, r 是双星之间的间距。	41
图 4.1	偏近点角和真近点角的几何关系示意图。	61
图 4.2	引力波六种可能的极化模式, 从上到下、从左到右依次代表 + 模式、 \times 模式、呼吸模式、矢量 x 模式、矢量 y 模式和纵向模式。上面三张图右上角的 \odot 代表引力波垂直纸面向外传播, 下面三张图右上角的 \rightarrow 代表引力波向右传播。	66
图 4.3	Hulse-Taylor 脉冲双星轨道衰减的长期观测, 该图引自 ^[188] 。横轴代表观测年份, 纵轴是经过近心点时间的累积移动。图中的点代表了观测数据, 曲线代表了广义相对论的理论预言, 与观测相一致。	71
图 4.4	利用波形模板 SEOBNRE 分析引力波事件 GW190521 推测得到的频率 10Hz 时残余偏心率 e_{10} 的后验概率分布。在 90% 置信区间上, $e_{10} \geq 0.11$ 。该图引自 ^[192] 。	78
图 4.5	通过 Bayes 推断, 由引力波事件 GW151226 和 GW170608 给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率分布, 该图引自 ^[95] 。其中竖直线表示了波形模板的适用上限 \mathcal{M}_s 。横轴标记 α_{dCS} 与本文的 α 含义相同。	88
图 4.6	从六个引力波事件分别给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率密度分布。该图引自 ^[96] 。横轴中的 α_{dCS} 与本文的 α 含义相同。	89

- 图 4.7 从引力波事件 GW190814 和 GW190412 给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率密度分布。该图引自^[97]。横轴代表了双星系统中最小的特征质量，其中 m_s 与本文的 \mathcal{M}_s 含义相同。图中的两点代表从引力波数据对 $\sqrt{\alpha}$ 的推断值和 90% 误差棒。…………… 90
- 图 4.8 对不同耦合参数 ζ 和不同初始偏心率 e_0 ，dCS 波形与广义相对论波形之间的不确定度。水平虚线代表两个波形可区分的不确定度阈值 $\text{Mismatch} \approx 0.0226$ 。该图引自^[100]。…………… 91
- 图 4.9 C 关系和 I-Love 关系。该图引自^[211]的 Supplemental Material。…… 92
- 图 4.10 孤立脉冲星 PSR J0030+0451 致密度的后验概率密度分布。该图引自^[211]的 Supplemental Material。…………… 93
- 图 5.1 2013 年-2020 年期间 M87 星系喷流的结构演化。该图引自^[218]。… 96
- 图 5.2 引力波事件 GW200129 中较大质量黑洞自旋大小和方向的后验概率密度分布。该图引自^[210]。为了方便排版，我们将原图逆时针旋转了 90 度。Tilt 代表了自旋矢量与轨道角动量之间的夹角 κ_1 ，Magnitude 表示无量纲自旋的大小 χ_1 。阴影区域集中在 $\kappa_1 \approx 90 \text{ deg}$ 附近表示自转角动量 \mathbf{S}_1 几乎与轨道平面平行。…………… 97
- 图 5.3 进动偏心双星系统的几何构型。其中蓝色实线标记的椭圆为双星系统的相对运动轨道，中心蓝色点为双星质心，位于蓝色轨道上的蓝色点代表双星相对位置 (或约化单体的位置)。黑色实线代表了基本系的三根轴，黑色虚线代表了基本系和轨道系的交线。淡蓝色线条标记了轨道上的特殊点——相对位置 (真近点角 V) 和近心点 (赤经 ψ_0)。紫色线条标记了双黑洞自旋角动量矢量 (\mathbf{S}_A) 及其方位角 (κ_A 和 ψ_A)。绿色线标记了轨道角动量的方位角 Θ 和 Y 。…………… 98

表格清单

表 3.1	标量辐射场关于真空光速的展开阶次。	54
表 4.1	天琴、ET 和 LISA 对 dCS 理论的约束能力。表格第一列列出了不同的波源类型，在正文中我们介绍了不同类型波源的总质量、质量比和光度距离。表格第二列给出了不同类型波源对应波形适用上限，以 \mathcal{M}_s^2 形式给出。后面三列依次给出了 Fisher 矩阵得到的不同探测器对不同类型波源的约束能力 $\Delta\alpha^2$ 。	90

符号说明

α, β dCS 引力理论中标量场和引力场的耦合常数

ζ 归一化无量纲耦合常数

ϑ dCS 引力中的额外标量场

$\eta_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ 平直和弯曲时空的度规张量

$H_{\mu\nu}$ 度规张量的扰动

$h_{\mu\nu}, k_{\mu\nu}$ 度规张量扰动中的广义相对论部分和 dCS 修正部分

m_A 天体 A 的质量

\mathbf{m} 当考虑孤立黑洞时的天体质量

S_A 天体 A 的自旋角动量矢量

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}, R_{\alpha\beta}, R$ Riemann 张量、Ricci 张量和 Ricci 标量

$G_{\mu\nu}$ Einstein 张量

$C_{\mu\nu}$ Cotton 张量

$T_{\mu\nu}^{(m)}, T_{\mu\nu}^{(\vartheta)}$ 物质场和标量场的能动张量

第 1 章 前 言

1.1 广义相对论及其实验验证

19 世纪末, 以 Newton 力学和 Maxwell 电磁理论为代表的经典物理学渐趋完善, 同时, 深入的研究也揭示了牛顿力学的局限性。例如, Newton 力学将引力视为一种超距作用, 无法解释水星近日点进动的问题, 并且与宇宙学观测不符。1905 年, Einstein 以狭义相对性原理和光速不变原理为基础, 揭示出绝对时空观测局限性, 提出了新的时空观, 并建立了狭义相对论^[1]。同时指出物理规律在任何惯性系中应当具有相同的形式, 并发展出相对论力学。

然而, 狭义相对论同样面临一些困难。一方面, 特殊惯性系难以明确给出定义。另一方面, Newton 万有引力定律与狭义相对论互不兼容。针对第一个问题, Einstein 将狭义相对性原理推广为广义相对性原理或广义协变原理, 即“一切参考系都是平权的, 物理定律在任何坐标系下都具有相同的形式”。而针对第二个问题, Einstein 在对质量这一概念的考察中发现, 物体所受引力总是正比于自身的质量, 这一质量称为引力质量。他同时注意到, 在一个非惯性参考系中, 物体所受到的惯性力同样正比于自身质量, 这一质量称为惯性质量。原则上, 引力质量和惯性质量是物体的两个独立属性, 但是实验表明这二者以极高精度相等。如果将这一结果作为假设, 就可以得出“引力场与相应加速度的非惯性参考系在物理上完全等价”的结论。即, 处于“电梯”(即一个充分小的区域) 内的观测者无法通过实验判断“电梯”是在引力场中保持静止还是处在一定的加速状态。这一等价性被称为等效原理^[2]。于是, 对引力场的描述就等效地转化为了对非惯性参考系的描述。换句话说, 在任一引力场的任一时空点, 都可以建立一个局域非惯性参考系, 在该参考系内, 物体受到的惯性力与引力相互抵消。

而 Riemann 几何恰好具有相似的性质。在 Riemann 几何中, 四维时空流形上相邻两点——坐标 x^μ 和 $x^\mu + dx^\mu$ ——之间的距离定义为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

该距离在坐标变换下保持不变。其中线性叠加系数 $g_{\mu\nu}$ 称为度规, 描述了两点间空间的伸展、压缩和扭曲。度规可以写为 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

的时空称为 Minkowski 时空。为了使新的引力理论符合广义协变原理，引力场方程所包含的物理量必须是张量，即在坐标变换 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ 下满足

$$\tilde{T}^{\alpha\beta\gamma\dots} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\lambda} \dots T^{\mu\nu\lambda\dots}, \quad (1.3)$$

一阶及更高阶张量的偏导数不符合上述变换关系，因此偏导数算符在 Riemann 空间被扩展为协变导数算符，定义为

$$\nabla_\mu T_{\alpha\beta\dots} = \partial_\mu T_{\alpha\beta\dots} + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda T_{\lambda\beta\dots} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda T_{\alpha\lambda\dots} + \dots, \quad (1.4)$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ 是 Christoffel 联络，定义为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (1.5)$$

该定义可以保证度规适配条件 $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ 成立。可以证明，在四维流形上的任何一点，都可以找到一个局域坐标系，使得该坐标系内 Christoffel 联络为零。从而 $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ，即度规各个分量为常数。一般来说，行列式非零的常数度规 $g_{\mu\nu}$ 总可以通过坐标变换被转换为 $\eta_{\mu\nu}$ 。综上所述，对 Riemann 流形上的任意一点，都可以建立一个参考系使局域时空平坦。这就揭示了 Riemann 几何与引力理论之间的相似性，从而为引力的几何化提供了基础^[3]。

从等效原理和广义协变原理出发，Einstein 于 1915 年提出了广义相对论的引力场方程^[4]，

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \textcircled{1}, \quad (1.6)$$

方程右侧是物质场的能量-动量张量(简称为能动张量),符合协变守恒 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 。方程左侧 $G_{\mu\nu}$ 是 Einstein 张量，描述了时空的弯曲，其定义为

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.7a)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.7b)$$

$$R^\rho_{\alpha\beta\lambda} \equiv \partial_\beta \Gamma^\rho_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\lambda} - \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}, \quad (1.7c)$$

其中 $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$ 、 $R_{\mu\nu}$ 和 R 分别称为 Riemann 张量、Ricci 张量和 Ricci 标量。同时方程左侧仅包含对引力场 $g_{\mu\nu}$ 的二阶偏导数，且满足 Bianchi 恒等式 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ 。这一引力场方程也可以从 Einstein-Hilbert 作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ (16\pi)^{-1} R + \mathcal{L}_m \} \quad (1.8)$$

对 $g^{\mu\nu}$ 的变分得到。对广义相对论的修正大多从 Einstein-Hilbert 作用量出发引入新的耦合项。 \mathcal{L}_m 代表了物质场的 Lagrange 密度。物质场的能动张量由

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.9)$$

^① 本文将采用自然单位制，即真空光速和万有引力常数 $c = G = 1$ 。

给出。

在 Einstein 引力场方程的基础上，广义相对论成功地预言了黑洞和引力波的存在^[5-6]，并解释了水星近日点进动现象^[7]。百年以来，广义相对论成功通过了来自亚原子尺度^[8]、太阳系尺度^[9-10]、天体物理尺度^[11? -14]和宇宙学尺度^[15-16]的检验，这些实验结果进一步巩固了广义相对论在物理学中的核心地位。

1.2 引力波理论和探测

广义相对论认为时空是动力学系统的一部分，那么时空的微小扰动就可以以波动的形式传播，这种时空的涟漪称为引力波，是广义相对论的另一重要预言。将完整的时空度规分解为平直时空背景和微小扰动的叠加

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

要求 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ，并将这一展开代入引力场方程 (1.6)，在精确到 $\mathcal{O}(h)$ 的阶次可以得到

$$\partial_\mu \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\mu} - \square_\eta^2 \bar{h}_{\nu\mu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} = 16\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

其中 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ 称为反迹度规张量， $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ ，适配于平直度规的 d'Alembert 算符定义为 $\square_\eta^2 = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ 。

对称的度规张量最多包含 10 个独立分量，但是由于受到能动张量守恒的约束， $h_{\mu\nu}$ 最多只有 6 个分量是独立的。由于引力场方程 (1.6) 左边自动满足 Bianchi 恒等式，只能人为地引入规范条件消除这些额外的自由度。一种常用的规范条件是 Lorenz 规范，

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

在该规范下，线性化引力场方程 (1.11) 简化为

$$\square_\eta^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

Lorenz 规范条件 (1.12) 总是可以通过坐标变换实现。在坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ 下，引力波度规符合变换 $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$ 。于是 Lorenz 规范的变换是 $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \square_\eta^2 \xi_\mu$ 。因此，只要适当选择规范矢量 ξ_μ ，就可以使得度规张量 $h_{\mu\nu}$ 符合 Lorenz 规范 (1.12)。

在波源以外，即 $T_{\mu\nu} = 0$ 的区域，引力波满足

$$\square_\eta^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.14)$$

这是一个四维时空中的波动方程，因此度规 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 描述了波的行为，并且表明引力波在真空中以光速传播。不难发现当 $\square_\eta^2 \xi_\mu = 0$ 时，方程 (1.14) 和 Lorenz 规范

(1.12) 在规范变换 $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ 下保持不变。这说明引力波方程 (1.14) 中仍存在 4 个残余自由度没有被完全消除。通过适当选取 ξ_0 可以使得 $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ，并且有 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ 。再通过适当选取 ξ^i 可以使得 $h^{0i} = 0$ 。再由 Lorenz 规范可知 $\partial^0 h_{00} = 0$ ，因此 h_{00} 不代表辐射场，也可将它设定为 0。这样，我们就得到了一组新的规范条件

$$h_{0\mu} = 0, \quad h_{ii} = 0, \quad \partial_j h_{ij} = 0, \quad (1.15)$$

称为横向无迹 (transverse-traceless, TT) 规范，并且消除了引力波 10 个独立分量中的 8 个，最后只留下两个物理的自由度。对于波矢方向沿 z 轴正方向的一束平面引力波，度规张量 $h_{\mu\nu}$ 可以写为

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ 0 & h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$h_+(t)$ 和 $h_\times(t)$ 代表了引力波两种极化模式。对于初始时刻位于圆环上一组试探粒子 (圆环平面垂直于引力波传播方向)，两种极化模式分别具有如图 (1.1) 所示的观测效应，通过观察一组试探粒子的相对运动，即可实现对引力波的探测。

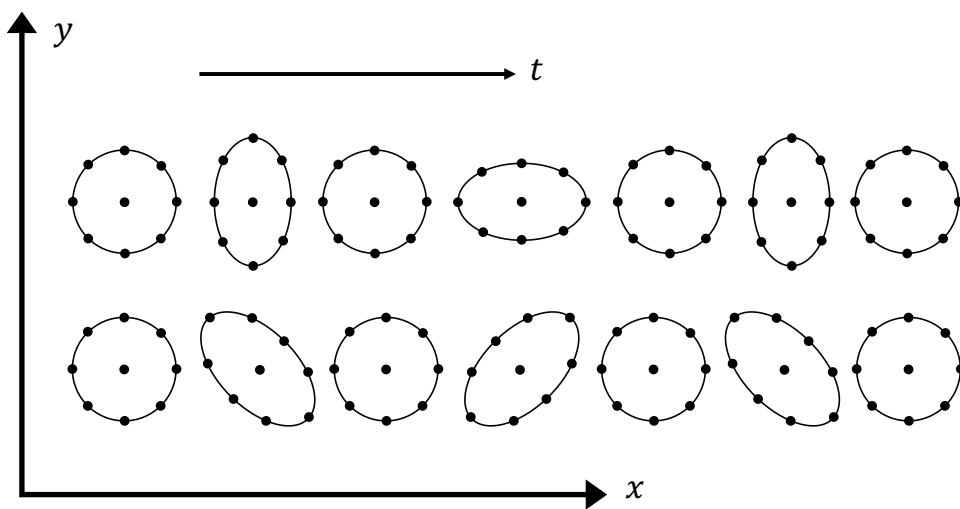


图 1.1 引力波 + 模式和 \times 模式的观测效应。

完成了对引力波在真空中传播的讨论后，我们转向关注引力波的产生过程。利用 Green 函数，引力波场方程 (1.13) 在 TT 规范下具有如下形式解

$$\bar{h}_{jk}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3 \mathbf{x}' \frac{T_{jk}(t_r, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (1.17)$$

这可以用于描述引力波的产生过程。其中 (t, \mathbf{x}) 是时空坐标， $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 是推迟时间。对于远场区域的一点，即 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 远远超过物质场分布的特征尺度时，

方程 (1.17) 近似为

$$\bar{h}_{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{4}{R} \int d^3 \mathbf{x}' T_{jk}(t_r, \mathbf{x}'), \quad (1.18)$$

其中 $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 为观测者相对波源的距离。利用分部积分，方程 (1.18) 可以转化为波源质量四极矩的二阶时间导数，即

$$\bar{h}_{jk}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{R} \ddot{Q}_{jk}, \quad Q_{jk} = \int d^3 \mathbf{x}' x'_j x'_k T_{00}(t_r, \mathbf{x}'), \quad (1.19)$$

上述讨论仅在考虑物质对线性化引力波的贡献时成立。通过对波源物质分布和运动的建模，可以对质量四极矩进行计算，从而给出可观测的引力波形。例如在引力相互作用下相互旋近的双黑洞系统就有非零的质量四极矩加速度，从而成为一类典型的引力波源。

直接的引力波探测始于 20 世纪 60 年代 Weber 设计的共振型引力波探测器^[17-18]，但是该探测器最终未能得到任何确切的引力波信号^[19]。此后，大型的激光干涉仪引力波探测器应运而生^[20-21]，以实现来自更遥远波源引力波信号的探测。当引力波经过这样一个探测装置时，探测器的臂会因引力的潮汐作用而发生延展和压缩，从而导致臂内激光的光程发生微弱的变化，在臂的末端形成激光干涉信号。以这一原理工作的引力波探测器包括美国的激光干涉引力波天文台 (The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO)^[22]、欧洲的室女座引力波天文台 (Virgo)^[23]，日本的 KAGRA 引力波天文台^[24]。正在规划建造的第三代引力波探测器包括：美国的 Cosmic Explorer (CE)^[25] 和欧洲的 Einstein Telescope (ET)^[26] 等地基引力波探测器，欧洲的 LISA 计划^[27]、中国的天琴^[28]和太极计划^[29]等天基引力波探测器。

激光干涉探测器直接响应于引力波的极化模式 $h_+(t)$ 和 $h_\times(t)$ ，并以时间序列 $s(t)$ 输出。其中 $s(t) = h(t) + n(t)$ ，同时包含了物理信号 $h(t)$ 和环境噪声 $n(t)$ 。其中 $h(t)$ 是引力波极化的线性组合

$$h(t) = h_+(t)F_+ + h_\times(t)F_\times, \quad (1.20)$$

其中 F_+ 和 F_\times 称为探测器的响应函数。一般地讲，如果引力波的物理信号振幅高于环境噪声， $|h(t)| > |n(t)|$ ，我们就可以实现对引力波的探测。但是通过对引力波信号和探测器噪声粗略的估计，我们发现 $|h(t)| \ll |n(t)|$ 。那么如何将引力波信号从强烈的环境噪声中提取出来呢？这是一个射电工程中常见的经典问题，答案是我们需要在一定精度上了解 $h(t)$ 的形式。物理信号 $h(t)$ 的已知形式称为波形模板。将模板与信号 $s(t)$ 相乘并在观测时间 T 内积分，有

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t)h(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T h^2(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T n(t)h(t)dt. \quad (1.21)$$

方程右侧第一项的积分是正定的，积分结果 $\sim h_0^2$ ， h_0 是引力波的特征振幅。而第二项由于环境噪声的随机性，积分结果约为 $(\tau_0/T)^{1/2} n_0 h_0$ ，其中 n_0 和 τ_0 是噪声的特征振幅和时标。因此，物理信号的提取不需要 $h_0 > n_0$ 这一条件，而只需要 $h_0 > (\tau_0/T)^{1/2} n_0$ 。例如取 $\tau_0 \sim 1\text{ms}$ ，观测时间为 $T \sim 1\text{yr}$ ，有 $(\tau_0/T)^{1/2} \sim 10^{-5}$ ，只要物理信号强度高于噪声的万分之一，就可以通过一年的累积观测将物理信号 $h(t)$ 从最终输出 $s(t)$ 提取出来。这一从强噪声中通过模板过滤的信号提取方法称为匹配滤波^[30]。完整的引力波探测和数据分析管线如图 (1.2) 所示，其中可以看到模板匹配在整个处理流程中的地位和作用。

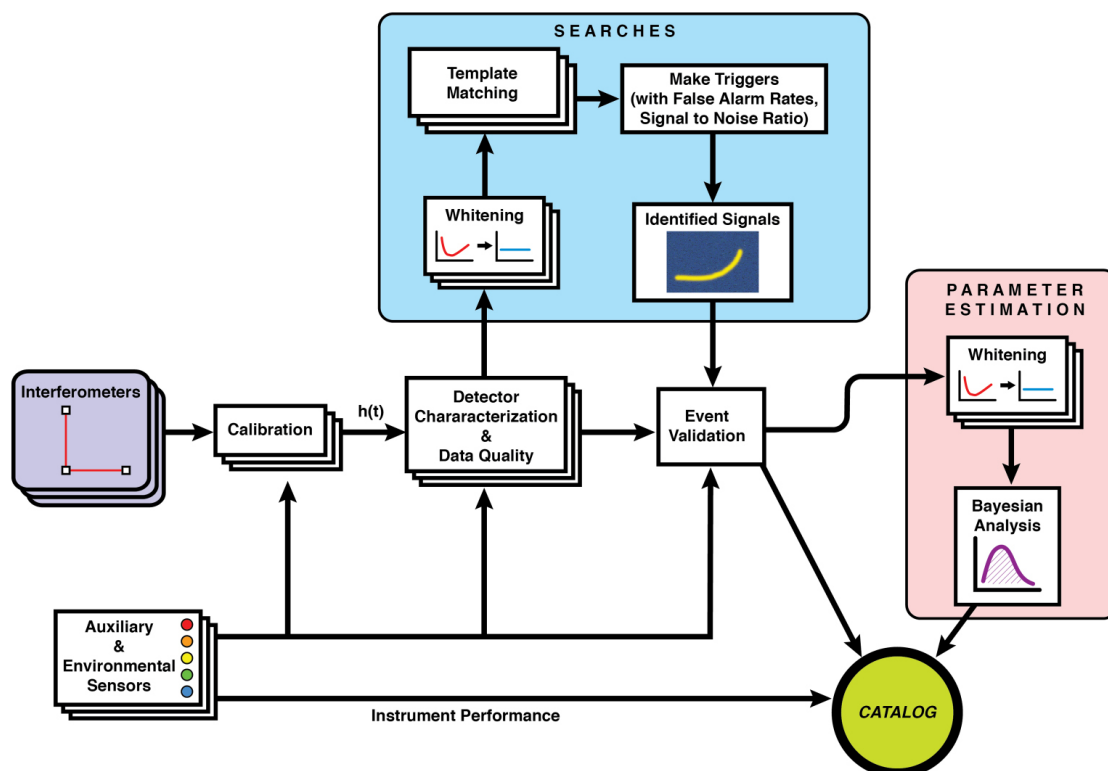


图 1.2 引力波信号数据分析管线，该图引自^[31]。

这就产生了一个新的问题：如何构建精确的引力波波形模板呢？最直接也最精确的方法是对 Einstein 引力场方程的直接求解。然而，由于方程的高度非线性特性，对引力波产生过程的精确解析求解几乎是不可能的。而数值相对论^[32-33]——使用计算机数值求解 Einstein 场方程，同样面临稳定性问题等巨大挑战。直到 2005 年稳定性问题才因自适应网格细化算法和广义谐和坐标等方法的引入而得以解决^[34-35]。截止到目前，已经有多个数值相对论小组建立了双黑洞并合过程的模拟列表。例如 Rochester 理工学院 (Rochester Institute of Technology, RIT) 小组的 RIT 列表^[36]和 Simulating eXtreme Spacetimes (SXS) 小组的 SXS 列表^[37]等。但是，数值相对论的计算成本极为昂贵，通常需要依赖超级计算机和 GPU 加速进行处理。而匹配滤波却需要大量快速的模板生成。显然，数值相对论模拟无法满足这样的实际需求。因此，一系列替代模板被提出，包括后牛顿展开^[38-39]、现

象学波形模板^[40-41]和有效单体 (effective one-body, EOB)^[40]等。其中后牛顿展开是最早发展起来的近似手段，通过对引力场方程和物质运动的低速展开实现波形解析求解，因此对模板构建、数值相对论可靠性检验和辐射过程物理图像的理解起到了重要的作用。

LIGO 于 2015 年实现了对引力波的首次直接观测, 位于 Hanford 和 Livingston 的两台激光干涉仪探测器探测到来自遥远双黑洞并合过程的引力波信号, 这一信号被命名为 GW150914^[42]。引力波的成功探测开启了引力波天文学的新时代。像 GW150914 这样来自致密双星并合过程的引力波信号大致分为三个阶段: 当双黑洞间距远超过各自的引力半径时, 双黑洞的运动可以近似地用 Newton 力学及其高阶修正描述, 这一阶段称为“旋进”或“旋近”(inspiral)。但是随着引力波带走双黑洞系统的结合能, 其轨道频率逐渐增大, 间距逐渐变小, 落入对方的强引力场内。最终两个黑洞相互碰撞, 融合为一个黑洞。这一过程称为“并合”(merger)。此时系统运动呈现强相对论性, 在短时间内释放巨大的能量。在整体融合为一个黑洞后, 剧烈扰动的残留继续辐射, 直到末态天体退化一个标准的 Kerr 黑洞。这一过程中的引力波可以看做黑洞背景下的微小扰动, 引力扰动以黑洞的特征频率辐射出来, 形成准正则模式。这一过程称为“铃宕”(ringdown), 可以由黑洞的扰动理论描述, 当末态黑洞完全退化为 Kerr 黑洞后, 引力辐射结束。这就是双黑洞并合过程的基本图像。

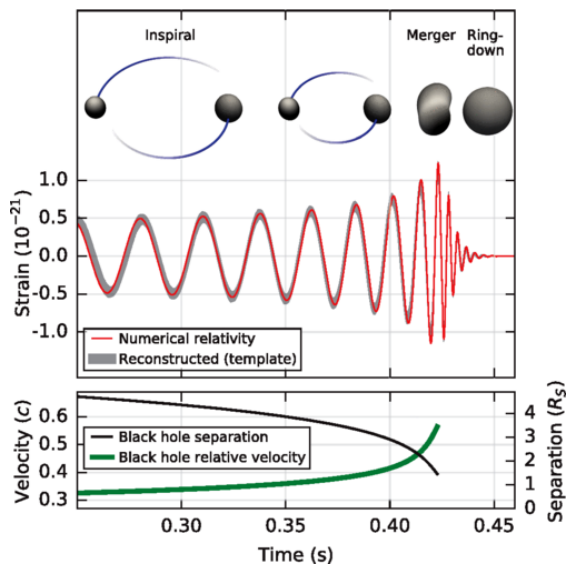


图 1.3 引力波事件 GW150914, 该图引自^[42]。引力波信号可以明显地区分为“旋近”、“并合”和“铃宕”三个阶段。

在此后的十年中, Virgo 探测器也加入观测阵列, 并在对第一个双中子星并合事件 GW170817^[43]的定位中发挥了重要作用。到目前为止, LIGO/Virgo/KAGRA 阵列已经成功观测到超过 90 例引力波事件^[44-47], 这些引力波事件均来自致密双星的并合, 包括双黑洞并合、双中子星并合以及中子星黑洞并合。

基于已有的引力波观测数据, LIGO/Virgo/KAGRA 合作组开展了一系列引力检验的研究^[48-52], 主要的检验方法包括引力波产生的参数化检验、色散关系检验、额外极化模式搜寻、准正则模式检验、旋进-并合-铃宕一致性检验等。例如在基于引力波产生过程的检验中, 人们引入一系列描述波形改变的参数, 对可能的广义相对论偏离进行参数化。例如在双星旋进阶段, 频域引力波波形可以通过后牛顿展开解析地给出, 其相位写为 $\Phi = \sum a_k v^k$, 其中 v 是双星系统的特征速度。展开系数 a_k 可以通过波源建模完全确定。引力波形中对广义相对论的可能偏离体现在系数 a_k 的变化上, 即 $a_k \rightarrow a_k + \delta a_k$ 。在参数估计中, δa_k 被视为自由参数, 与决定 a_k 的内禀参数一起进行 Bayes 推断。广义相对论的偏离将会体现在 δa_k 的后验概率分布中。对具体的修改引力理论, δa_k 会依赖于理论的某些内禀参数——耦合系数、天体的标量荷, 对 δa_k 的约束就可以映射为对特定引力理论的限制。

1.3 超越广义相对论和宇称破缺引力理论

广义相对论被认为是目前最成功的引力理论。但是, 在理论上, 广义相对论无法解决量子化^[53]和时空奇点疑难^[54], 从而无法实现与描述微观世界物理的量子力学的融合。在观测上, 人们为了解释星系旋转曲线^[55]和宇宙加速膨胀^[56]等问题, 不得不引入暗物质^[57]和暗能量^[58]的概念, 而这些概念背后的物理尚未可知。这些困难均表明广义相对论可能是一个不完整的理论。因此, 人们在理论层面提出各种修改引力来对广义相对论进行补充和修正, 在观测层面则不断寻找广义相对论新的实验证据。

但是 Lovelock 定理表明, 在四维 Riemann 时空中, 仅由度规张量构造的二阶时空导数的引力场方程只能是 Einstein 引力场方程^[59]。这就意味着如果想要构造区别于广义相对论的其他理论, 只能从以下几个方面入手:

- 增加新的自由度。例如在 Brans-Dicke 引力^[60]和 Horndeski 理论^[61]中, 人们引入标量场作为“第五种力”的传播媒介, 在 Einstein-aether 理论^[62]中, 则引入了矢量场作为修正。
- 接受高于二阶时空导数的引力场方程, 例如 $f(R)$ 引力^[63]。
- 高维引力理论。例如 Einstein-Gauss-Bonnet 引力^[59]。
- 放弃 Riemann 几何。例如以挠率代替曲率作为时空弯曲表述的平行等价广义相对论 (teleparallel equivalent of general relativity, TEGR)^[64], 及其相应的扩展, 如 $f(T)$ 引力^[65]和 Nieh-Yan (NY) 引力^[66-67]等。

这些理论通常引入耦合常数来描述对广义相对论偏离的强度。引力理论的修正自然地影响到太阳系天体和人造卫星的运动、黑洞的时空结构、电磁波的传

播、引力波的产生和传播、宇宙膨胀机制、宇宙大尺度结构形成和演化等问题。通过天文观测和理论预言的对比，可以给出耦合常数的上限，从而形成对修改引力的限制或约束。对新效应建模并结合观测给出对耦合常数的更紧约束是修改引力研究的主要目标之一。

近年来，一类宇称破缺的修改引力理论引起了人们的广泛关注。对称性在物理学中具有核心地位，它不仅为理论提供了简洁优美的数学结构，还深刻揭示了自然界的基本规律。物理规律的宇称(空间反演)变换协变性是重要的对称性之一。作为宇称协变的必然结果，宇称守恒被视为自然界的基本法则，广泛应用于粒子物理的研究中。然而，20世纪50年代，李政道和杨振宁提出了弱相互作用中宇称不守恒的理论预测^[68]，吴健雄等人则于1957年在钴-60原子核 β 衰变实验首次观测到宇称不守恒现象^[69]，成为现代粒子物理学的一个里程碑。

那么引力中是否也存在宇称对称性和宇称守恒的可能破缺呢？为验证引力的宇称对称性，物理学家发展出多种宇称破缺的修改引力理论，并通过不同尺度的观测对它们进行检验。下面我们对几类主要的宇称破缺引力理论进行简要介绍。

1.3.1 Riemann 几何框架中的宇称破缺引力

1. Chern-Simons 引力

Chern-Simons (CS) 引力^[70-72]是最早提出的，也是最简单的宇称破缺引力理论。该理论的作用量写为

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (16\pi)^{-1} R + \mathcal{L}_{\text{CS}} + \mathcal{L}_{\vartheta} + \mathcal{L}_m \right\}, \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{\alpha}{4} \vartheta R \hat{R}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{L}_{\vartheta} = -\beta \left[\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \vartheta) (\nabla^{\mu} \vartheta) + V(\vartheta) \right], \quad (1.24)$$

其中 ϑ 是CS标量场。 g 代表了弯曲时空度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式， $1/\sqrt{-g}$ 的引入是为了确保引力理论的协变性。 $\frac{\alpha}{4} \vartheta R \hat{R}$ 称为Pontryagin密度，定义为

$$R \hat{R} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta}_{\rho\lambda}. \quad (1.25)$$

其中 α 是具有长度平方量纲的耦合常数，代表了标量场与引力场之间的耦合强度。 $\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \vartheta) (\nabla^{\mu} \vartheta)$ 代表了标量场的动能， ∇_{μ} 是与时空度规 $g_{\mu\nu}$ 适配的协变导数。 $V(\vartheta)$ 代表了标量场的势能，在本文中，我们总是取 $V(\vartheta) = 0$ 。 β 是无量纲常数，如果取 $\beta = 0$ ，则标量场本身不具有动力学特性，对应ndCS理论。当 $\beta = 1$ 时则得到dCS理论。

从作用量 (1.22) 的形式不难看出, 这一理论涉及到引力场的高阶导数, 这会诱导 Ostrogradsky 不稳定性的出现, 因此 CS 理论只能看做基础理论的低能截断。为解决这一问题, Crisostomi 等人^[73]通过在作用量中引入标量场的高阶导数来避免这一效应。

2. 一般宇称破缺的标量-张量引力

一般宇称破缺的标量-张量引力是 Crisostomi 等人^[73]为了消除 dCS 理论中的引力场高阶导数而提出的宇称破缺引力理论。将 CS 引力中的标量场拓展为标量场 ϕ 的函数 $\vartheta(\phi)$, \mathcal{L}_{CS} 进一步扩展为 \mathcal{L}_{PV} , 写作

$$\mathcal{L}_{\text{PV}} = \mathcal{L}_{\text{CS}} + \sum_{A=1}^4 a_A(\phi, \phi_\mu \phi^\mu) L_A + \sum_{A=1}^7 b_A(\phi, \phi_\mu \phi^\mu) M_A, \quad (1.26)$$

其中 L_A 和 M_A 的具体形式可以在文献^[74-77]中找到。与 CS 修正相比, L_A 和 M_A 分别包含了标量场的一阶和二阶导数。为避免 Ostrogradsky 不稳定性, 耦合常数应满足 $4a_1 + 2a_2 + a_3 + 8a_4 = 0$ 和 $b_7 = 0, b_6 = 2(b_4 + b_5), b_2 = -A_*^2(b_3 - b_4)/2$, 其中 $A_* \equiv \dot{\phi}(t)/N$, N 为 Lapse 函数。

3. 宇称破缺的 Hořava-Lifshitz 引力

Hořava-Lifshitz 引力认为, Lorentz 协变只是一种低能条件下自然出现的对称性, 而不会出现在高能条件下^[78-79]。这为构造高能标下不依赖 Lorentz 协变性的量子引力提供了一种新的思路。通过放弃 Lorentz 对称性, 宇称破缺效应可以很自然地纳入这一理论, 例如涉及到三阶空间导数的宇称剖切项写为

$$\mathcal{L}_{\text{PV}} = \frac{1}{\mathcal{M}_{\text{PV}}^3} (\alpha_0 K_{ij} R_{ij} + \alpha_2 \epsilon^{ijk} R_{il} \nabla_j R_k^l) + \frac{\alpha_1 \omega_3(\Gamma)}{\mathcal{M}_{\text{PV}}}, \quad (1.27)$$

其中 \mathcal{M}_{PV} 是高阶导数算符有显著效应的能量尺度。 α_0 、 α_1 、 α_2 是无量纲的任意耦合常数, K_{ij} 和 R_{ij} 分别表示对应三维空间度规 g_{ij} 外曲率和三维 Ricci 张量。 ∇_i 表示对应 g_{ij} 的协变导数, $\omega_3(\Gamma)$ 是三维引力 CS 项。

1.3.2 非 Riemann 几何框架中的宇称破缺引力

引力理论也可以建立在非 Riemann 几何框架的基础之上, 最经典的粒子是平行引力 (teleparallel gravity, TG) 和对称平行引力 (symmetric teleparallel gravity, STG)。TG 采用了时空的挠率而非曲率来描述引力, 与广义相对论等价的一种模型是 TEGR。在 STG 框架中, 时空既没有曲率也没有挠率, 引力由非度规性张量 $Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu}$ 描述。与广义相对论等价的理论是对称平行广义相对论 (symmetric teleparallel general relativity, STGR)。建立在 TEGR 和 STGR 基础上的宇称破缺理论分别是 NY 引力^[66-67]和宇称破缺的 STGR 引力^[80-81]

1. Nieh-Yan 引力

NY 引力是在 TEGR 的基础上通过引入标量场与时空挠率的相互作用而构造出来的，作用量中的宇称破缺项是

$$\mathcal{L}_{\text{NY}} = \frac{c}{4}\theta T\hat{T}, \quad T\hat{T} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} T_{A\mu\nu} T^A_{\rho\lambda}. \quad (1.28)$$

其中 c 是耦合常数， θ 是 NY 引力引入的额外标量场。 $T_{A\mu\nu}$ 是时空的非零挠率张量，代表了引力的强度，一般同时依赖于标架场 e_A^μ 和自旋联络 $\omega^A_{B\mu}$ ，

$$T_{\mu\nu}^\lambda = 2e_A^\lambda \left(\partial_{[\mu} e^A_{\nu]} + \omega^A_{B[\mu} e^B_{\nu]} \right). \quad (1.29)$$

其中标架场与度规张量的关系是 $g_{\mu\nu} = \eta_{AB} e^A_\mu e^B_\nu$ ，自旋联络由 Lorentz 变换矩阵元 Λ^A_B 给出， $\omega^A_{B\mu} \equiv (\Lambda^{-1})^A_C \partial_\mu \Lambda^C_B$ 。

2. 宇称破缺的 STG

与 CS 和 NY 引力相似，我们也可以在 STGR 的基础上引入宇称破缺项，基于非度规性张量，这一修正项构造为

$$\mathcal{L}_{\text{PVSTG}} = -c\phi \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} Q_{\mu\nu\alpha} Q_{\rho\lambda}{}^\alpha. \quad (1.30)$$

其中 ϕ 是额外标量场。非度规性张量 $Q_{\alpha\mu\nu}$ 定义为度规张量的协变导数

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\lambda\mu}. \quad (1.31)$$

1.4 本文内容与结构

dCS 引力是最简单同时具有代表性的一类宇称破缺理论，本文将以 dCS 理论为主开展关于引力宇称对称性检验的相关讨论和研究。本文由四个主要部分构成。

1. 本文第一部分对 dCS 引力理论进行了系统的介绍

我们首先给出 dCS 理论的作用量和场方程，并说明 CS 项的引入是如何破坏宇称协变性的。之后将场方程应用到不同的天体物理场景进行求解。在宇宙学尺度上，标量场的真空期望值随宇宙膨胀而演化，这会驱动引力波出现振幅双折射效应，两种极化模式遵循不同的演化方程，并出现相互转化。通过引力波观测，可以对修正能标 $\mathcal{M}_{\text{PV}} \sim \alpha \dot{\vartheta}_0$ 实现约束^[82-87]，其中 α 是 dCS 耦合常数， $\dot{\vartheta}_0$ 代表背景标量场的时间导数。然而这无法形成对耦合常数 α 的独立约束。

在较小尺度的天体物理情形中，弱耦合和慢转动近似可以给出 dCS 引力下的旋转黑洞解^[88-90]。弱耦合意味着这一解析解仅在 $\sqrt{\alpha} \ll \mathcal{M}_s$ 的情况下成立，其中 \mathcal{M} 是系统最小的特征尺度(质量)。例如，地球-人造卫星系统的特征尺度为

毫米量级，脉冲双星为 1km 量级，恒星级质量双黑洞观测需要达到 5 – 10km 量级。这是贯穿本文的重要假设，是对 dCS 引力产生有意义约束的前提条件。应用孤立黑洞解，可以对人造卫星及其搭载陀螺仪的运动、脉冲双星运动和自旋进动进行定量预测。结合观测数据发现，到目前为止，人造卫星所能给出的约束大约只有 $\sqrt{\alpha} \leq \mathcal{O}(10^8 \text{km})$ ^[88]，通过脉冲星观测给出的约束为 $\sqrt{\alpha} \leq \mathcal{O}(10^4 \text{km})$ ^[89]，都无法对耦合常数施加有意义的限制。这就要求我们寻找新的探测方法提高限制能力，而引力波恰好为我们提供了一种新的方案。根据第 1.2 节中对匹配滤波方法的讨论，对修改引力的引力波检验同样依赖于精确的波形模板的构建。对典型的恒星级质量双黑洞系统的动力学建模和波形计算构成了本文的主要研究目标。

在广义相对论中，线性化引力场方程和测地线方程都是引力波形的计算重要基础。因此在第 2.4 节，我们对 dCS 引力中引力场线性和二阶扰动进行了讨论，给出引力波和标量波所满足的波动方程。第 2.5 节则采用有效场论方法对测地线方程进行了推广。由于 dCS 引力对球对称时空没有修正，因此必须将自旋偶极和四极矩纳入对测地线方程的修正，从而导出修正的 Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) 方程和自旋粒子的能动张量。

2. 本文第二部分在后牛顿近似框架下对 dCS 引力下的双黑洞系统进行一般性的研究

对引力波形的解析计算就是对双黑洞系统运动方程和线性化引力场方程的求解。本文的求解过程将在后牛顿框架^[38,91]下进行，其中引力场被按照系统特征速度展开为幂级数。在近场区域，时空结构由双黑洞的引力场共同支配，并决定二者的运动和引力辐射的源。通过对线性化引力场方程的积分，我们给出近场度规和标量解，发现 dCS 引力的修正出现在相对 Newton 引力 $\mathcal{O}(v^4)$ 阶次，即 2PN 阶次和自旋的平方阶。修正项包括两类——双黑洞标量场相互作用导致的自旋-自旋耦合 (spin-spin coupling)，自旋四极矩和质量单极矩相互作用导致的单极-四极耦合 (monopole-quadrupole coupling)。在双黑洞系统中，dCS 理论对 1.5PN 阶次开始出现的自旋-轨道耦合 (spin-orbit coupling) 没有修正^[92]。

双黑洞系统的运动方程可以从修正的 MPD 方程导出。MPD 方程描述了单个自旋粒子在弯曲背景时空中动量和自旋角动量的演化。将近场的度规和标量解代入其中，按照特征速度展开到 2PN 阶次，并进行相应的正规化处理后，即可得到后牛顿近似下的一组运动方程。这组方程包含两个部分。一部分描述了粒子的平动——即坐标或速度的时间演化，dCS 修正出现在 2PN 阶次，包含自旋-自旋耦合和单极-四极耦合两个部分。另一部分描述了自旋进动矢量的时间演化。由于 Newton 引力中质点的自旋对引力场和粒子运动没有贡献，所以其主导阶来自自旋-轨道耦合，dCS 修正相对高出 $\mathcal{O}(v)$ 阶次。在后牛顿近似适用的范围内，只要给定足够的初始条件，这两个方程就完全确定了双黑洞系统的运动。

在完成对运动描述后，我们转向在远场区域积分线性化引力场方程，给出双黑洞系统运动而导致的引力辐射和标量辐射。其中标量辐射被精确到特征速度的主导阶次，包含了单极辐射和四极辐射两个部分，处于黑洞自旋的线性阶。引力辐射同样包含了自旋-自旋和单极-四极耦合两个部分。但是标量场与引力场的耦合项对引力辐射没有贡献，因此在引力波辐射阶段，引力波极化不会呈现于宇称破缺效应。最后，本文以引力辐射的一般表达式作为这一部分的结尾，从而完成对双黑洞系统运动和辐射的一般讨论。

3. 本文第三部分给出了自旋平行双黑洞系统的引力波形

早在引力波探测实现之前，Yagi & Yunes & Tanaka 等人就对 dCS 引力下准圆轨道双黑洞系统辐射的引力波形进行了计算^[93-94]。Fisher 估计表明，引力波探测对 dCS 引力耦合常数的估计上限约为 $\mathcal{O}(10 - 100\text{km})$ ，远远好于太阳系观测和脉冲双星观测。在引力波成功探测后，Nair 等人^[95]、Perkins 等人^[96]和 Wang^[97]等人分别采用不同的引力波观测数据，对 dCS 理论进行了限制。可惜的是，这些约束所给出的耦合常数上限大约只有 $\sim \mathcal{O}(10 - 40\text{km})$ ，都超出了弱耦合近似的适用范围，属于缺乏物理意义的约束。Shi 等人^[98]利用 Fisher 矩阵方法估计了未来第三代引力波探测器对 dCS 理论的约束能力。对于准圆轨道上不同质量和不同质量比的双黑洞系统都无法给出 dCS 引力的有效约束。一般地，引力波形模板的精确度与参数估计的精确度息息相关。本文的主要目标是优化 dCS 引力下的波源建模，在波形中引入轨道偏心率和自旋进动的影响。这些效应可能会放大 dCS 波形与广义相对论的区别，从而使得现在或下一代引力波探测器有能力捕捉宇称破缺的痕迹。

本文首先对自旋平行情况进行了详细计算。此时，双黑洞系统的轨道角动量守恒，系统的运动局限在一个平面内，我们采用准开普勒参数化方法对运动方程进行了求解，并展示了高阶后牛顿修正中的近心点进动效应。将准开普勒参数化解代入辐射场的一般表达式即可得到守恒部分的引力波形。通过 Newman-Penrose 分析方法，我们验证了 dCS 引力中引力波仍然只有两种独立的极化模式——+ 模和 \times 模^[99]，这是标量辐射与引力辐射脱耦导致的必然结果。因此后续的推导可以放心地使用 TT 规范。随后我们讨论了 dCS 引力下引力波能量和角动量的定义，并计算双黑洞系统的能量和角动量损失，进而得到轨道根数的辐射演化——轨道频率持续增大直到双黑洞相互靠近到后牛顿近似失效的范围，轨道偏心率持续减小直到充分圆化。最后为了实际观测的需要，我们采用稳态相位法解析地计算了对应的频域波形。通过对不匹配度 (mismatch) 的估计，我们发现考虑偏心率的影响后，仍然不足以在现有的引力波观测中区分出宇称破缺的信号^[100]。因此我们将进一步优化波形计算，将自旋进动考虑进来。

4. 本文第四部分对自旋进动双黑洞系统的运动和辐射进行了初步求解

自旋进动双黑洞的运动可以通过分为两部分，轨道平面本身的进动和双星在平面轨道上的运动。由于两者在不同的时间尺度上演化，多尺度分析可以将运动和进动相互解耦。在本文中我们主要关注运动方程的求解，进动仅用三个 Euler 角描述。由于自旋二阶修正会破坏轨道角动量大小的守恒性，本文仿照 Gergely^[101-103]做法，引入周期平均化轨道角动量，并改写了运动方程。然后将 Klein 等人^[104-105]的准开普勒参数化方案推广到 dCS 引力。将参数化解代入辐射场的一般表达式给出守恒部分引力波形及其轨道衰减。自旋进动会给引力波形带来复杂的振幅和相位调制——轨道角动量的章动给引力波形带来 0.5PN 阶次的振幅修正，方位角漂移带来 1PN 的相位修正，轨道运动的修正进入 2PN 和相位修正。这些修正，尤其是低阶调制有望放大 dCS 引力波形与广义相对论的差别，进而改进当前或未来引力波观测对宇称破缺效应的限制^[106-107]。此外我们还发现，自旋进动情形下存在标量单极辐射，这导致了零偏心率轨道不再是双星系统辐射反作用下最终稳定态，这也可能成为未来观测中区分广义相对论与宇称偏离引力的一个判据。

本文其余章节结构如下。第2章将对 dCS 引力进行系统的回顾，包括作用量和场方程、振幅双折射效应、孤立慢转动黑洞解、线性化引力场方程、自旋粒子的运动及其相关的检验。第3章通过从 MPD 方程和线性化引力场方程出发，给出双黑洞运动方程和辐射场的一般表达式。第4章研究了自旋平行系统的运动和引力辐射。第5章初步研究了自旋进动系统中运动方程的准开普勒参数化解、引力辐射和轨道衰减效应。最后，我们在第6章做简要的总结和展望。

第 2 章 Chern-Simons 引力和宇称破缺

本章对 dCS 引力及其相关的宇称破缺机制做一个简要介绍。在第 2.1 节介绍 dCS 引力的作用量和场方程。第 2.2 节将关注 dCS 理论对引力波传播的影响——振幅双折射效应，并介绍与之相关的宇称对称性检验。在第 2.3 节中，我们给出 dCS 引力中的孤立慢转动黑洞解，并介绍太阳系和脉冲双星观测宇称对称性的检验。第 2.4 节主要讨论修正引力场方程在平坦时空中的线性化。第 2.5 节将推导 MPD 方程——描述自旋粒子在弯曲背景时空中的运动和自旋进动。

本章主要目的在于为全文的计算和论述建立理论基础，并进一步地阐明本文的主要动机。对于理论基础，慢转动黑洞解是研究双黑洞旋近系统的重要前提，无论是双黑洞的相对运动还是引力辐射都依赖于孤立黑洞的时空结构。而线性化场方程是计算引力辐射场的基本出发点，MPD 方程是后牛顿框架下研究转动黑洞运动的基本工具。对于本文的主要动机，本章将介绍基于振幅双折射效应的宇称对称性检验，由于该效应不仅依赖于耦合参数，还依赖于标量场真空期望值随宇宙膨胀的演化，所以无法给出对 α 的独立约束。而基于慢转动黑洞解进行的卫星检验和脉冲双星检验则无法满足弱耦合近似的要求。以上结论都是我们转向引力波观测和更精确波源建模的主要动机。

2.1 作用量和引力场方程

从作用量的变分可以得到对应的引力场方程。CS 引力的作用量由方程 (1.8) 给出，其中第一项是为 Einstein-Hilbert 作用量，对度规 $g^{\mu\nu}$ 变分可以得到它的变分将给出 Einstein 张量 $G_{\mu\nu}$ 。第二项代表了标量场和引力场的耦合，其变分比较复杂。忽略边界项的贡献后可以等价地写为

$$\int d^4x \sqrt{-g} \vartheta R \hat{R} = 2 \int d^4x \vartheta (\partial_\mu K^\mu) = -2 \int d^4x (\partial_\mu \vartheta) K^\mu, \quad (2.1)$$

其中 K^μ 是 CS 拓扑流，由 Christoffel 联络定义为

$$K^\rho = \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \left[\Gamma_{\sigma\mu}^\nu (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu) + \frac{2}{3} \left(\Gamma_{\sigma\mu}^\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \right) \right], \quad (2.2)$$

并满足散度条件

$$\partial_\mu K^\mu \equiv \frac{1}{2} \hat{R} R. \quad (2.3)$$

借助几何恒等式 $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ 可以给出拓扑流的变分为

$$\delta K^\rho = \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \left[(\delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu) (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu) + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \partial_\alpha (\delta \Gamma_{\beta\nu}^\mu) + 2 (\delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu) \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \right]. \quad (2.4)$$

因此可以对方程 (2.1) 的变分进行化简, 得到

$$\int d^4x (\delta K^\rho) (\partial_\rho \vartheta) = - \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

其中 $C_{\mu\nu}$ 称为 Cotton 张量或 C-张量, 定义为

$$C^{\mu\nu} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\rho(\mu|\alpha\beta} \left[\nabla_\alpha R_{\beta}^{|\nu)} \right] (\nabla_\rho \vartheta) - \hat{R}^{\lambda(\mu|\rho|\nu)} (\nabla_\lambda \nabla_\rho \vartheta). \quad (2.6)$$

放在括号中的指标代表对称化操作, $T_{(\mu|\dots|\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\dots\nu} + T_{\nu\dots\mu})$ 。

结合方程 (2.5), 并令 $\delta S / \delta g^{\mu\nu} = 0$, 可以得到修改的引力场方程^[71-72]

$$G_{\mu\nu} + 16\pi\alpha C_{\mu\nu} = 8\pi \left[T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(\vartheta)} \right]. \quad (2.7)$$

$T_{\mu\nu}^{(m)}$ 是物质场的能动张量, 由 (1.9) 给出。dCS 标量场的能动张量是

$$T_{\mu\nu}^{(\vartheta)} = \beta \left[(\nabla_\mu \vartheta) (\nabla_\nu \vartheta) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \vartheta) (\nabla^\alpha \vartheta) \right]. \quad (2.8)$$

类似地, 通过对 ϑ 的变分可以得到标量场满足的方程^[71-72],

$$\square_g^2 \vartheta = - \frac{\alpha}{4\beta} R \hat{R}. \quad (2.9)$$

其中 \square_g^2 是适配于度规 $g_{\mu\nu}$ 的 d'Alembert 算符 $\square_g^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ 。动力学情形中, 这一方程描述了标量场的时间演化和空间分布, 同时可以看到方程右侧包含了度规场的高阶导数。但是在非动力学情形中, 它只代表对引力场的一个约束, 即 $R \hat{R} = 0$, 称为 Pontryagin 约束。

非动力学情形 ndCS 具有更简单的数学形式, 因此在 CS 提出的初期被广泛研究。然而深入的研究表明, ndCS 理论本身存在严重的问题。Pontryagin 约束是一个修改引力场方程的一个过约束, 例如非动力学情形不允许 Kerr 解的存在, 也不允许 Schwarzschild 黑洞存在任何的引力扰动。这表明非动力学情况只能被视为一个玩具模型, 动力学情况才能代表更真实的物理^[72]。本文将关注动力学情形下的相关修正。

2.2 振幅双折射和宇称破缺的检验

2.2.1 引力波在宇宙背景时空中的传播

当背景标量场随时间演化时, 引力波的传播也会呈现出双折射效应。我们假定背景时空由 Robertson-Walker 度规描述。同时标量场只是时间的函数 $\vartheta = \vartheta_0(t)$ 。在考虑引力微扰后, 完整的度规写为

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + H_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (2.10)$$

其中 η 是共形时间, 和坐标时间 t 之间存在关系 $dt = a(\eta)d\eta$ 。 $a(\eta)$ 是宇宙尺度因子, 并在现在归一化为 $a(\eta = 0) = 1$ 。 Hubble 参数定义为 $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$, 其中 $\dot{}$ 代表对坐标时间的求导。 H_{ij} 是度规扰动的空间分量, 并符合 TT 规范, $\partial_i H_{ij} = \delta^{ij} H_{ij} = 0$ 。 将度规 (2.10) 代入引力场方程 (2.7), 并精确到微扰的线性阶得到

$$\mathcal{H}^2 = \frac{4}{3}\pi\beta(\vartheta'_0)^2, \quad \mathcal{H}' = -2\mathcal{H}^2, \quad (2.11)$$

和

$$H''_{jk} + 2\mathcal{H}H'_{jk} - (\nabla^2 H_{jk}) + \frac{16\pi\alpha}{a^2}\epsilon^{sm}{}_{(j}\partial_m \left[\vartheta'_0 H''_{s|k)} + \vartheta''_0 H'_{s|k)} - \vartheta'_0 (\nabla^2 H_{s|k)} \right] = 0. \quad (2.12)$$

其中方程 (2.11) 是修正的 Friedmann 方程。 这意味着在 dCS 理论中, 宇宙的膨胀可以由背景标量场 ϑ_0 驱动。 Laplace 算符定义 $\nabla^2 \equiv \partial_i \partial_i$ 。

为更方便地看出 dCS 理论对引力波传播过程的影响, 我们将传播方程 (2.12) 分解到不同极化和不同波矢,

$$H_{jk} = \sum_{A=L,R} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} H_A(\eta, \kappa_i) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) e_{jk}^A \quad (2.13)$$

其中 \mathbf{k} 是引力波的波矢, 左旋和右旋极化张量是

$$e_{ij}^{L,R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{ij}^+ \pm ie_{ij}^\times), \quad e_{ij}^+ = \hat{u}_i \hat{u}_j - \hat{v}_i \hat{v}_j, \quad e_{ij}^\times = \hat{u}_i \hat{v}_j + \hat{v}_i \hat{u}_j, \quad (2.14)$$

\hat{u} 和 \hat{v} 是垂直于引力波波矢 \mathbf{k} 且相互正交的基矢。 于是方程 (2.12) 分解为左旋和右旋极化模式各自满足的传播方程,

$$H''_A + (2 + \nu_A) \mathcal{H}H'_A + (1 + \mu_A)\kappa^2 H_A = 0, \quad (2.15)$$

其中 $\kappa = |\mathbf{k}|$ 为引力波波数, $\rho_{L,R} = \pm 1$ 。 参数

$$\mu_A = 0, \quad \nu_A = \frac{(16\pi\alpha)\rho_A\kappa(2\mathcal{H}\vartheta'_0 - \vartheta''_0)/(a^2\mathcal{H})}{1 - (16\pi\alpha)\rho_A\kappa\vartheta'_0/a^2}. \quad (2.16)$$

其中 μ_A 描述了引力波的速度双折射效应, 即左旋波和右旋波具有不同的传播速度。 而 ν_A 描述了振幅双折射效应, 即左旋和右旋波的振幅会在传播中分别增大和减小(或减小和增大), 从而出现两种极化模式之间的混合。 在广义相对论中这两个参数都为零, 在 dCS 理论下只有振幅双折射效应, 在更一般的宇称破缺引力^[75]中振幅和速度双折射效应同时存在。

为了对这两种效应进行分别的定量计算, 对引力波极化模式做如下形式的代换

$$H_A = \hat{H}_A e^{-i\theta_A(\eta)}, \quad (2.17)$$

其中 \hat{H}_A 代表了引力波的原始波形^①，修正因子 $e^{-i\theta_A}$ 代表了对振幅的修正，且参数 θ_A 具有量级 $\mathcal{O}(\theta_A) \sim \mathcal{O}(v_A)$ 。将 (2.17) 代入传播方程 (2.15)，在参数 v_A 的零阶和线性阶分别给出

$$\hat{H}_A'' + 2\mathcal{H}\hat{H}_A' + (1 + \mu_A)\kappa^2\hat{H}_A = 0, \quad (2.18)$$

和

$$(\mathcal{H}v_A - 2i\theta_A')\hat{H}_A' - [\theta_A'^2 + i\theta_A'' + i\theta_A'(2 + v_A)\mathcal{H}]\hat{H}_A = 0, \quad (2.19)$$

方程 (2.18) 和 (2.19) 分别给出了原始波形和振幅修正因子 θ_A 的演化。对原始波形 \hat{H}_A 进行进一步分解为

$$\hat{H}_A = \mathcal{A}_A e^{-i\Phi(\eta)}, \quad (2.20)$$

其中 \mathcal{A}_A 和 Φ 均为实数，代表原始引力波形的振幅和相位。且有 $\mathcal{O}(\Phi') \sim \mathcal{O}(\kappa)$ 。将这一分解代入方程 (2.18) 和 (2.19) 分别得到

$$i\Phi'' + \Phi'^2 + 2i\mathcal{H}\Phi - (1 + \mu_A)\kappa^2 = 0, \quad (2.21)$$

$$i\theta_A'' + 2\theta_A'\Phi' + \theta_A'^2 + i(2 + v_A)\mathcal{H}\theta_A' + i\mathcal{H}v_A\Phi' = 0, \quad (2.22)$$

第一个关于 Φ 的方程描述了引力波的相位修正，即速度双折射。第二个关于 θ_A 的方程描述了振幅双折射。这里我们只针对 dCS 引力探讨振幅双折射。

由于 θ_A 的演化起源于宇宙膨胀和背景标量场的演化，因此其时间变化尺度与宇宙年龄在相同量级，于是有 $\mathcal{O}(\theta_A') \sim \mathcal{O}(\mathcal{H}\theta_A)$ 和 $\mathcal{O}(\theta_A'') \sim \mathcal{H}^2\theta_A$ 。同时我们假定 $\kappa \gg \mathcal{H}$ ，即引力波的波长远小于宇宙的尺度。仅保留主导阶，方程 (2.22) 简化为 $2\theta_A'\Phi' + i\mathcal{H}v_A\Phi' = 0$ ，其解为

$$\theta_A(\eta) = -\frac{i}{2} \int_{\eta_s}^{\eta} \mathcal{H}(\eta')v_A(\eta')d\eta'. \quad (2.23)$$

其中 η_s 是波源所在位置的共形时间。因此引力波传播到 η 时刻的振幅修正为

$$e^{-i\theta_A(\eta)} = 1 + \rho_A\bar{\xi} + \mathcal{O}(\bar{\xi}^2), \quad (2.24)$$

$$\bar{\xi} = (16\pi^2\alpha) [\dot{\vartheta}_0(t_0) - (1+z)\dot{\vartheta}_0(t_s)] f, \quad (2.25)$$

其中在膨胀宇宙中的引力波频率是 $f = \kappa/(2\pi a_0)$ 。这里我们假定了参数 $\bar{\xi} \ll 1$ ，这称为弱 CS 假设^[108]。综合上述讨论，经过宇宙学尺度传播的引力波极化将由 \hat{H}_A 演化为 H_A ，这一变换关系整理为

$$H_+ = \hat{H}_+ - i\bar{\xi}\hat{H}_\times, \quad H_\times = \hat{H}_\times + i\bar{\xi}\hat{H}_+. \quad (2.26)$$

^①这里暂且不考虑 dCS 对引力波产生的修正。

可以看到引力波的两极化模式之间会出现相互转化。这就是引力波的振幅双折射效应，是 dCS 理论中宇称破缺效应的主要体现。对于近邻宇宙 ($z \ll 1$)，我们有 $\dot{\vartheta}_0(t_s) \approx \dot{\vartheta}_0(t_0) + \ddot{\vartheta}_0(t_0)(t_s - t_0) \approx \dot{\vartheta}_0(t_0) + [\ddot{\vartheta}_0(t_0)/\mathcal{H}_0]z$ ，因此

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 \pi f z, \quad \bar{\xi}_0 = -(16\pi\alpha) \left[\dot{\vartheta}_0(t_0) - \frac{\ddot{\vartheta}_0(t_0)}{\mathcal{H}_0} \right], \quad (2.27)$$

在考虑了传播效应后，引力波修正对 α 和 $\dot{\vartheta}_0 - (\ddot{\vartheta}_0/\mathcal{H}_0)$ 的依赖是简并的，通过对比引力波观测结果与上述理论模型，可以给出对参数 $\bar{\xi}_0$ 的相关约束。但却无法给出对耦合常数 α 单独的限制。

2.2.2 通过振幅双折射对宇称破缺的检验

在第 2.2 节中，我们推导了 dCS 引力下和宇宙学背景时空中引力波极化的演化，通过对引力波信号的探测可以给出 dCS 理论的限制。尽管 dCS 理论对引力波产生也存在修正，但与宇宙学尺度的传播效应相比是可以忽略的，所以引力波形可以简化为仅由广义相对论贡献。引力波探测器接收到的信号是两个极化模式的线性叠加，叠加系数为探测器响应函数，即 $H = H_+ F_+ + H_\times F_\times$ 。于是对应的频域波形可以写为

$$\tilde{H}(f) = \mathcal{A} \delta \mathcal{A} e^{i(\Psi + \delta\Psi)}. \quad (2.28)$$

振幅和相位修正分别是

$$\delta \mathcal{A} = \sqrt{(1 + \cos^2 \iota + 2\bar{\xi} \cos \iota)^2 F_+^2 + [2 \cos \iota + (1 + \cos^2 \iota)\bar{\xi}]^2 F_\times^2}, \quad (2.29a)$$

$$\delta \Psi = \tan^{-1} \left\{ \frac{[2 \cos \iota + (1 + \cos^2 \iota)\bar{\xi}] F_\times}{(1 + \cos^2 \iota + 2\bar{\xi} \cos \iota) F_+} \right\}, \quad (2.29b)$$

其中 ι 是双星系统轨道倾角。 \mathcal{A} 和 Ψ 代表了广义相对论下的引力波形。其中参数 $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 \pi f z$ ， $\bar{\xi}_0$ 定义在方程 (2.27) 中。Yagi & Yang^[108] 采用 Fisher 信息矩阵的方法计算了不同探测器对参数 $\bar{\xi}_0$ 的测量不确定度。其中考虑了一组类 GW150914 的引力波事件，它们在天空中指向和方位角随机分布。对 O1 运行阶段的 LIGO，引力波源均匀分布在光度距离 240Mpc 到 570Mpc 的范围内，信噪比固定为 23.7。对设计灵敏度的 LIGO/Virgo 探测器阵列和第三代引力探测器 CE(假定放置在 LIGO Harvard)，引力波源固定在光度距离 420Mpc。假定初始波形来自准圆轨道双黑洞系统，由模板 IMRPhenomB 构建。对参数 $\bar{\xi}_0$ 的 1σ 约束上限的分布概率展示在图 (2.1) 中。绿色阴影区域代表了弱 CS 近似的成立范围。可以看到 O1 阶段的 LIGO 观测给出的限制是很弱的，第二代引力波探测器阵列和第三代探测器有望对 $\bar{\xi}_0$ 实现有意义的约束。

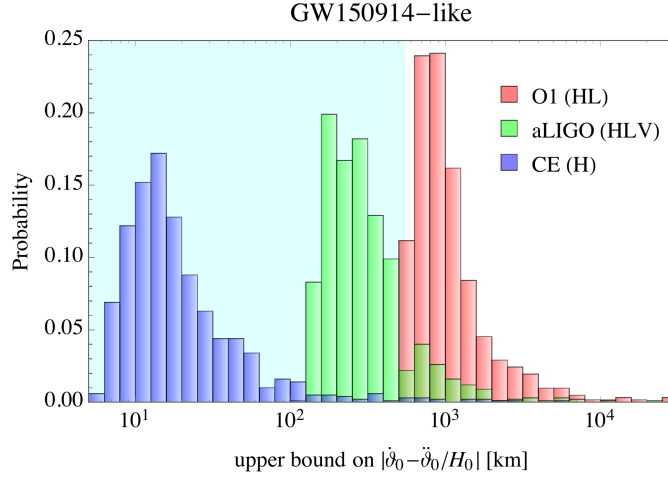


图 2.1 Yagi & Yang^[108]通过 Fisher 矩阵分析给出的对参数 $\bar{\xi}_0$ 约束上限 (1σ) 的概率密度分布。图中横轴与我们讨论的 $\bar{\xi}_0$ 一致，原文中将系数 $16\pi\alpha$ 吸收到了标量场背景 ϑ_0 中。

2.3 孤立黑洞解、太阳系和脉冲双星检验

黑洞的存在是广义相对论的重要预言之一。Schwarzschild 解^[109]是 Einstein 引力场方程的第一个严格解，由 Schwarzschild 于 1916 年得到。其不变距离在 Schwarzschild 坐标 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 中的形式为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad f(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.30)$$

该解描述了具有静止、球对称质量分布的物体外部的时空结构， m 是该物体的静止质量。当物体的质量全部集中在引力半径 $r = 2m$ 以内时， $r = 2m$ 球面成为一个奇异的曲面，位于该曲面内侧的试探粒子只能向中心掉落而无法逃逸。因此当一个天体坍缩到质量分布半径小于引力半径后，所有物质将不可避免地落入中心点。因此，引力半径外的观测者是无法看到该物体的，因此这样的物体被命名为黑洞，引力半径处的曲面称为事件视界。最终，物体的全部质量将集中在球心，形成一个真正的物理奇点。

轴对称黑洞由 Kerr 在 1963 年解出^[110]，其不变距离在 Boyle-Lindquist 坐标 $x^\mu = \{t, r, \theta, \varphi\}$ ^[111]下写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(K)} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2\theta d\varphi - dt)^2, \quad (2.31)$$

其中 $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ 和 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ 。其中 m 仍然为黑洞的质量， a 是黑洞的角动量，在 $a = 0$ 时 Kerr 解 (2.31) 回到 Schwarzschild 度规 (2.30)。

我们研究的 dCS 引力是一类宇称破缺的修改引力理论，数学上则可以证明球对称时空 Pontryagin 密度为零。因此 dCS 理论对球对称系统没有任何修正，Schwarzschild 黑洞仍然是引力场方程 (2.7) 的一个解^[71,112]。因此求解旋转黑洞

解成为了一个必然的要求。然而，旋转黑洞解的求解即使在广义相对论中也是一个非常困难的任务，在修改引力中更是如此。目前存在的几种求解方案包括

- 远场近似解。Alexander & Yunes^[113]以小参量 m/r 对引力场方程进行级数展开，找到了 dCS 理论的弱场解，并在^[114]中使用该解对 dCS 理论进行了约束。
- 弱耦合和慢转动近似解。dCS 耦合常数和黑洞的自旋参数被视为小参量，将引力场方程按照这两个参数级数展开，并将修正部分看做 Kerr 黑洞背景上的扰动，通过逐阶求解扰动方程得到黑洞解。Yunes & Pretorius^[89]和 Yagi 等人^[90]分别在自旋的一阶和二阶进行了求解。这一方法更适合于解析地研究黑洞结构及其相关的动力学过程。本文将采用这一方法。
- 弱耦合和快转动解。Stein^[115]在弱耦合但快自旋的情况下对场方程进行了数值求解，并确定了弱耦合极限的适用范围。
- 数值解。Terence 等人^[116]采用完全数值的方法积分引力场方程，得到了任意自旋的黑洞解，且该解在弱耦合和慢转动近似下与^[89-90]一致。

2.3.1 弱耦合与慢转动近似

下面考虑一个质量 m ，自旋为 a 的质点在 dCS 理论中的度规场。首先我们假设标量场与引力场之间仅存在微弱的耦合。由于耦合常数 α 具有质量平方的量纲，我们定义无量纲量 $\hat{\alpha} = \alpha/m^2$ ，并要求 $\hat{\alpha} \ll 1$ ，另取无量纲自旋系数 $\hat{\chi} = a/m \ll 1$ 。这两个假设分别称为弱耦合和慢转动假设。于是度规和标量场函数可以以 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\chi}$ 作为展开系数进行微扰展开。从方程 (2.9) 可知，标量场解应对应 $\mathcal{O}(\hat{\alpha})$ 和更高阶。同时由于对球对称时空 $R\hat{R} = 0$ ，dCS 理论完全回到广义相对论，因此标量场应对应 $\hat{\chi}$ 的线性阶和更高阶。因此我们假设标量场具有如下形式，

$$\vartheta = \hat{\alpha} [\hat{\chi}\vartheta^{(1,1)} + \hat{\chi}^2\vartheta^{(1,2)} + \dots] + \dots \quad (2.32)$$

$\vartheta^{(i,j)}$ 表示对应耦合常数 i 阶和自旋 j 阶的标量解。更高阶展开超出本文所关心的范围。接下来我们将度规场展开为如下形式

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(K)} + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi} g_{\mu\nu}^{(2,1)} + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2 g_{\mu\nu}^{(2,2)} + \dots \quad (2.33)$$

其中 $g_{\mu\nu}^{(K)}$ 代表 Kerr 度规^[110]， $g_{\mu\nu}^{(i,j)}$ 的额外指标的含义与标量场相同。由于修正项 $\mathcal{O}(\alpha C_{\mu\nu}) \sim \mathcal{O}(\alpha\vartheta) \sim \mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ 和 $\mathcal{O}(T_{\mu\nu}^{(\vartheta)}) \sim \mathcal{O}(\vartheta^2) \sim \mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ ，度规修正对应 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ 及更高阶。我们最终需要求解的是 $g_{\mu\nu}^{(2,1)}$ ， $g_{\mu\nu}^{(2,2)}$ ， $\vartheta^{(1,1)}$ ， $\vartheta^{(1,2)}$ 等四个未知函数，由于旋转黑洞的轴对称和稳态特性，这些函数在 Boyel-Lindquist 坐标 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ ^[111] 中都只是半径 r 和极角 θ 的函数。同时，受到时间反演对称性的限制，自旋一阶项 $g_{\mu\nu}^{(2,1)}$ 仅有 $(t\varphi)$ 分量非零，自旋二阶项 $g_{\mu\nu}^{(2,2)}$ 仅有对角元非零。因此度规修正部分

可以写为

$$g_{\mu\nu}^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{t\varphi}^{(2,1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{t\varphi}^{(2,1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu}^{(2,2)} = \begin{pmatrix} g_{tt}^{(2,2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr}^{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta}^{(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi}^{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

此外, 还有 $g_{\varphi\varphi}^{(2,2)} = \sin^2 \theta g_{\theta\theta}^{(2,2)}$ 。对未知函数的分离变量会简化场方程的求解。因为时空度规在 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^0 \hat{\chi}^0)$ 阶次就是 Schwarzschild 度规, 所以 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\chi}$ 的高阶修正可以看成 Schwarzschild 度规上的微扰。仿照黑洞引力扰动的 Regge-Wheeler-Zerilli 形式^[117-118], 将上述待求解函数按照张量球谐函数分解为

$$\begin{aligned} g_{t\varphi}^{(2,1)}(r, \theta) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} W_{\ell}(r) \left[-\frac{r}{\sqrt{2\ell(\ell+1)}} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{\ell 0}(\theta) \right], \\ g_{tt}^{(2,2)}(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[f(r) H_{\ell}(r) \right] Y_{\ell 0}(\theta), \\ g_{rr}^{(2,2)}(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{1}{f(r)} F_{\ell}(r) \right] Y_{\ell 0}(\theta), \\ g_{\theta\theta}^{(2,2)}(r, \theta) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \left[\sqrt{2} K_{\ell}(r) \right] \cdot \left[\frac{r^2}{\sqrt{2}} Y_{\ell 0}(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

于是, 原来的偏微分方程被完全变量分离, 其角向分布由球谐函数及其导数给出, 径向函数的解将通过微扰的引力场方程解出。

2.3.2 慢转动黑洞的求解

1. 标量场方程的解

精确到 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2)$ 的 Pontryagin 密度是

$$R\hat{R} = -\hat{\chi} \left\{ \frac{288\mathbf{m}^3}{r^7} \cos \theta + \alpha^2 \frac{24\mathbf{m}}{r^5} \left[\partial_r \partial_{\theta} g_{t\varphi}^{(2,1)} - \frac{2}{r} \partial_{\theta} g_{t\varphi}^{(2,1)} \right] \csc \theta \right\}, \quad (2.36)$$

只依赖于自旋的一次幂, 因此从标量场方程 (2.9) 可知 $\vartheta^{(1,2)} = 0$ 。化简标量场方程 (2.9) 到 $\mathcal{O}(\hat{\alpha} \hat{\chi})$ 给出 $\vartheta^{(1,1)}$ 满足的方程

$$f(r) \partial_r^2 \vartheta^{(1,1)} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{m}}{r} \right) \partial_r \vartheta^{(1,1)} + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta}^2 \vartheta^{(1,1)} + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_{\theta} \vartheta^{(1,1)} = \frac{72\mathbf{m}^3 \cos \theta}{\beta r^7}, \quad (2.37)$$

对标量场按照球谐函数展开为

$$\vartheta^{(1,1)}(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}(r) Y_{\ell 0}(\theta), \quad (2.38)$$

由于方程非齐次项 $\propto \cos \theta$ ，因此只需要考虑球谐展开中的 $\ell = 1$ 模式，并要求 $R_{\ell=1}(r)$ 在 $r \rightarrow \infty$ 时以快于 $1/r$ 的形式衰减，从而得到^[89-90]

$$\vartheta = -\frac{5}{8} \hat{\chi} \frac{\alpha \cos \theta}{\beta r^2} \left[1 + \frac{2\mathbf{m}}{r} + \frac{18\mathbf{m}^2}{5r^2} \right]. \quad (2.39)$$

2. 张量场方程的解

首先对修正的引力场方程分离到不同的阶次。为简单起见，我们使用粗体字母代表张量符号，例如度规张量 $g_{\mu\nu}$ 写为 \mathbf{g} 。于是 Einstein 张量分解为

$$\begin{aligned} & \mathbf{G} [\mathbf{g}^{(0,0)} + \hat{\chi} \mathbf{g}^{(0,1)} + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi} \mathbf{g}^{(2,1)} + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2 \mathbf{g}^{(2,2)} + \dots] \\ &= \mathbf{G} [\mathbf{g}^{(K)}] + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi} \mathbf{G} [\mathbf{g}^{(K)}, \mathbf{g}^{(2,1)}] \\ & \quad + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2 \{ \mathbf{G} [\mathbf{g}^{(K)}, \mathbf{g}^{(2,2)}] + \mathbf{G} [\mathbf{g}^{(0,1)}, \mathbf{g}^{(2,1)}] \} + \dots, \end{aligned} \quad (2.40)$$

C-张量是

$$\begin{aligned} & \alpha \mathbf{C} [\mathbf{g}^{(0,0)} + \hat{\chi} \mathbf{g}^{(0,1)} + \dots, \hat{\alpha} \hat{\chi} \vartheta^{(1,1)}] \\ &= \hat{\alpha}^2 \hat{\chi} \mathbf{C} [\mathbf{g}^{(0,0)}, \vartheta^{(1,1)}] + \hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2 \mathbf{C} [\mathbf{g}^{(0,1)}, \vartheta^{(1,1)}] + \dots, \end{aligned} \quad (2.41)$$

dCS 标量场能动张量

$$\mathbf{T}^{(\vartheta)} [\hat{\alpha} \hat{\chi} \vartheta^{(1,1)}, \hat{\alpha} \hat{\chi} \vartheta^{(1,1)}] = \hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2 \mathbf{T}^{(\vartheta)} [\vartheta^{(1,1)}, \vartheta^{(1,1)}] + \dots. \quad (2.42)$$

因此在 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi})$ 阶和 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2)$ 阶分别给出方程

$$\mathbf{G} [\mathbf{g}^{(K)}, \mathbf{g}^{(2,1)}] = -\mathbf{C} [\mathbf{g}^{(0,0)}, \vartheta^{(1,1)}] \quad (2.43)$$

和

$$\mathbf{G} [\mathbf{g}^{(K)}, \mathbf{g}^{(2,2)}] = \mathbf{S}. \quad (2.44)$$

其中

$$\mathbf{S} = -\mathbf{G} [\mathbf{g}^{(0,1)}, \mathbf{g}^{(2,1)}] - \mathbf{C} [\mathbf{g}^{(0,1)}, \vartheta^{(1,1)}] + \mathbf{T}^{(\vartheta)} [\vartheta^{(1,1)}, \vartheta^{(1,1)}]. \quad (2.45)$$

方程 (2.43) 是关于 $\mathbf{g}^{(2,1)}$ 的非齐次方程，可以按照与求解标量场方程相似的方法解出。然后将 $\mathbf{g}^{(2,1)}$ 和 $\vartheta^{(1,1)}$ 代入方程 (2.44)，得到关于 $\mathbf{g}^{(2,2)}$ 的非齐次方程。

在 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi})$ 阶次，可以将方程 (2.43) 完全写出，得到

$$\left[f(r) \partial_r^2 + \frac{4\mathbf{m}}{r^3} + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 - \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta \right] g_{t\varphi}^{(2,1)} = \frac{96\pi \mathbf{m}}{r^3} f(r) \sin \theta \left(\partial_r \partial_\theta - \frac{1}{r} \partial_\theta \right) \vartheta^{(1,1)}, \quad (2.46)$$

方程非齐次项 $\propto \sin^2 \theta$ ，因此只需要考虑 $\ell = 1$ 模中渐近衰减快于 $1/r$ 的特解。从而得到^[89-90]

$$g_{t\varphi}^{(2,1)}(r, \theta) = \frac{10\pi \mathbf{m}}{\beta r^4} \sin^2 \theta \left[1 + \frac{12\mathbf{m}}{7r} + \frac{27\mathbf{m}^2}{10r^2} \right]. \quad (2.47)$$

方程 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2)$ 阶次的求解较为复杂。首先将方程 (2.44) 记做 $G_{\mu\nu}^{(2,2)} = S_{\mu\nu}^{(2,2)}$ ，方程两侧的张量都有等五个偶宇称的非零分量，用偶宇称的张量球谐函数进行暂开，得到一组关于 $H_\ell(r), F_\ell(r), K_\ell(r)$ 的方程并给出有限级数解。具体细节可以参见补充材料A.1。

3. 小结

在 dCS 引力中，一个稳态的、轴对称的、渐近平坦的，质量和自旋分别为 \mathbf{m} 和 $a, \hat{\chi} = a/\mathbf{m}$ 的真空黑洞解由方程 (2.32, 2.33) 给出，其中标量场的解由方程 (2.39) 给出。而度规的扰动可以借助张量球谐函数展开为 (2.35)，其中非对角元 ($t\varphi$) 分量是 (2.47)，其他径向函数的解展示在补充材料中 (A.3)。在后续的计算和讨论中，常用的精确到 $\mathcal{O}(\mathbf{m}/r)$ 最低阶的结果包括

$$\vartheta = -\frac{5}{8} \frac{\alpha}{\beta \mathbf{m}^2} \hat{\chi} \left(\frac{\mathbf{m}}{r} \right)^2 \cos \theta, \quad (2.48)$$

和

$$g_{t\varphi} = g_{t\varphi}^{(K)} + \frac{5}{8} \bar{\zeta} \mathbf{m} \hat{\chi} \left(\frac{\mathbf{m}}{r} \right)^4 \sin^2 \theta, \quad (2.49a)$$

$$g_{tt} = g_{tt}^{(K)} - \frac{201}{1792} \bar{\zeta} \hat{\chi}^2 \left(\frac{\mathbf{m}}{r} \right)^3 (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (2.49b)$$

其中定义了无量纲的耦合常数

$$\bar{\zeta} \equiv 16\pi \frac{\alpha^2}{\beta \mathbf{m}^4}. \quad (2.50)$$

这里我们仅限于研究孤立黑洞，因此在定义 $\bar{\zeta}$ 时使用了体系的特征质量——黑洞的质量进行归一化处理。在后续处理双黑洞时， $\bar{\zeta}$ 的定义会修改为采用双黑洞总质量归一化。

这一慢转动黑洞解不仅可以描述黑洞的时空结构，也是对旋转天体外部度规的合理近似。其 $g_{t\varphi}$ 分量中的 dCS 修正直接影响地球人造卫星的 Lense-Thirring 进动、陀螺仪进动和脉冲双星的运动，对这些效应的测量可以转化为对 $g_{t\varphi}$ 的测量，从而实现耦合参数 $\bar{\zeta}$ 的约束。

2.3.3 黑洞的时空和多极结构

广义相对论预言了 Schwarzschild 和 Kerr 黑洞事件视界和中心奇点的存在^[119]。可以通过计算标量 $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 表明，在 $r = 0$ 处黑洞解 (2.48, 2.49) 也存在物理的奇点。事件视界是黑洞周围的一个理论边界，任何进入其中的物质和辐射都无法逃脱。通过求解方程 $g_{tt} g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2 = 0$ 可以确定事件视界的位置，得到

$$r_H = r_H^{(K)} \left(1 - \frac{915}{57344} \bar{\zeta} \hat{\chi}^2 \right). \quad (2.51)$$

能层是旋转黑洞周围的一个区域，在该区域内，物体无法保持静止，会被黑洞的旋转拖拽着运动。通过求解方程 $g_{tt} = 0$ 可以得到能层半径的表达式为

$$r_{\text{ergo}} = r_{\text{ergo}}^{(\text{K})} \left[1 - \frac{915}{57344} \bar{\xi} \hat{\chi}^2 \left(1 + \frac{2836}{915} \sin^2 \theta \right) \right]. \quad (2.52)$$

视界面上的旋转角速度描述了这种拖拽效应的大小，定义并计算为

$$\Omega_{\text{H}} = - \left. \frac{g_{tt}}{g_{t\phi}} \right|_{r=r_{\text{H}}} = \Omega_{\text{H}}^{(\text{K})} \left(1 - \frac{709}{7168} \bar{\xi} \right), \quad (2.53)$$

事件视界的面积是

$$A_{\text{H}} = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} \Big|_{r=r_{\text{H}}} d\theta = A_{\text{H}}^{(\text{K})} \left(1 - \frac{915}{28672} \bar{\xi} \hat{\chi}^2 \right), \quad (2.54)$$

其中涉及到 Kerr 时空的对应物理量分别是：事件视界 $r_{\text{H}}^{(\text{K})} = \mathbf{m} + \sqrt{\mathbf{m}^2 - a^2}$ ，能层半径是 $r_{\text{ergo}}^{(\text{K})} = \mathbf{m} + \sqrt{\mathbf{m}^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ ，事件视界面上旋转角速度是 $\Omega_{\text{H}}^{(\text{K})} = a/(r_{\text{H}}^{(\text{K})} + a^2)$ ，事件视界面积是 $A_{\text{H}}^{(\text{K})} = 8\pi \mathbf{m} \sqrt{2\mathbf{m} r_{\text{H}}^{(\text{K})} - a^2}$ 。在黑洞解中使用的参数 \mathbf{m} 和 a 是我们事先设定的黑洞内禀参数，但它们只能代表黑洞的“裸质量”和“裸自旋”，而“可观测质量”和“可观测自旋”则受到 dCS 理论的重整化 (renormalization)。在视界角速度 (2.53) 和事件视界面积 (2.54) 的结果中，可以通过对质量和自旋的重定义 $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{\text{RN}}$ 、 $a \rightarrow a_{\text{RN}}$ 将 dCS 修正完全吸收，从而得到重整化质量自旋分别为^[90]

$$\mathbf{m}_{\text{RN}} = \mathbf{m} \left(1 - \frac{2333}{57344} \hat{\chi}^2 \right), \quad a_{\text{RN}} = a \left(1 - \frac{709}{7168} \bar{\xi} \right). \quad (2.55)$$

因为质量 \mathbf{m} 和自旋 a 是渐近物理量，所以时空多极结构的领头阶修正出现在质量四极矩中。跟随 Kip Thorne 的步骤^[120]，通过将黑洞度规从 Boyle-Lindquist 坐标变换到渐近直角质心 (asymptotically Cartesian and mass centered, APMC) 坐标 $\{\tilde{t}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$ ，可以直接从 Newton 势 U (定义为 $\tilde{g}_{tt} = -1 + 2U$) 中读出质量四极矩的表达式。APMC 变换是

$$t = \tilde{t}, \quad r = \tilde{r} + \frac{\mathbf{m}^2 \hat{\chi}^2}{2\tilde{r}} \cos^2 \tilde{\theta}, \quad \theta = \tilde{\theta} - \frac{\mathbf{m}^2 \hat{\chi}^2}{2\tilde{r}^2} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}. \quad (2.56)$$

变换后的度规分量 \tilde{g}_{tt} 写为

$$U = \frac{\mathbf{m}}{\tilde{r}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{\tilde{r}^3} \left[-8\sqrt{\frac{\pi}{15}} \mathbf{m}^3 \hat{\chi}^2 \left(1 - \frac{201}{1792} \bar{\xi} \right) Y_{20} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{m}^3 \hat{\chi}^2 \right] + \dots. \quad (2.57)$$

对比四极矩的定义，

$$U = \frac{\mathbf{m}}{\tilde{r}} + \frac{3}{\tilde{r}^3} [Q_{20} Y_{20} + (\ell = 0 \text{ pole})] + \dots \quad (2.58)$$

得到^[90]

$$Q_{20} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \left(\frac{1}{2} - \frac{201}{3584} \bar{\xi} \right) m^3 \hat{\chi}^2. \quad (2.59)$$

该定义方式下四极矩与四极矩张量 Q_{ij} 之间的关系为 $Q_{2k} Y_{2k} = Q_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j$ ，其中单位方向矢量为 $\hat{n} = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$ 。其中 Q_{ij} 是

$$Q_{ij} = \sum_{k=-2}^2 Q_{2k} \mathcal{Y}_{ij}^{2k} = Q_{20} \mathcal{Y}_{ij}^{20} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{201}{3584} \bar{\xi} \right) m^3 \hat{\chi}^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

其中 $\mathcal{Y}_{ij}^{\ell k}$ 是 (ℓ, k) 阶球分量，定义为 $Y_{\ell k} = \mathcal{Y}_{ij}^{\ell k} \hat{n}_i \hat{n}_j$ ，于是 Newton 势可以写为

$$U = \frac{m}{r} + \frac{3}{r^3} Q_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j + \dots \quad (2.61)$$

这一结果将对后续双黑洞间相互作用、双黑洞系统近场区域的后牛顿解起到重要作用。到这里我们完成了对黑洞多极结构的简要回顾。

2.3.4 太阳系观测

太阳系是宇宙中人类最为熟悉和了解的区域。通过卫星观测数据和行星运动的精确观测，可以给出对引力理论的弱场检验。这里我们关注两个卫星实验——地球激光动力学卫星 (Laser Geodynamics Satellite, LAGEOS) 和引力探针 B (Gravity Probe B, GPB)。

LAGEOS 是美国国家航空航天局和意大利航天局的合作项目，LAGEOS-1 于 1976 年发射，LAGEOS-2 于 1992 年发射。卫星表面覆盖反射镜，通过地面站发射激光并接收反射信号，以实现精确定位，从而测量了卫星轨道升交点赤经的变化率为 $\sim 48.2 \text{mas/yr}$ ^①，这就是地球自转导致的 Lense-Thirring 进动效应。在数据分析中，Ciufolini & Pavlis^[121]假定了 10% 的测量不确定度，包括了已知和未知的误差来源。

GPB 项目是由美国国家航空航天局和斯坦福大学共同主导的一项重大科学实验，该卫星于 2004 年 4 月 20 日发射升空并运行于地球极轨道。它搭载了四台超高精度的陀螺仪，用于测量地球周围时空的微小扭曲，旨在验证测地效应和惯性系拖曳效应。陀螺仪的初始自转轴对准遥远的标准星，测地效应导致陀螺仪自转轴南北方向的漂移，惯性系拖曳效应则会导致东西方向的漂移。四个陀螺仪的联合测量结果为南北漂移速率 $-6601.8 \pm 18.3 \text{mas/yr}$ ，东西漂移速率为 $-37.2 \pm 7.2 \text{mas/yr}$ ^[122]。

以上卫星实验的测量结果与广义相对论的预言高度一致。而 dCS 理论会对地球外部度规的 $(t\varphi)$ 分量产生修正 [见方程 (2.49a)]，从而引起 Lense-Thirring 效

^①两颗卫星测量结果的线性叠加，且叠加结果独立于地球的质量四极矩。

应和自旋东西向漂移的改变。通过对观测值的分析可以给出 dCS 耦合常数的上限。作为一个粗略的估计，该限制大致由

$$\left| \frac{g_{t\varphi}(r)}{g_{t\varphi}^{(K)}(r)} - 1 \right| = \frac{5}{32} \bar{\xi} \left(\frac{m}{r} \right)^3 \lesssim \varepsilon \quad (2.62)$$

给出。其中 $g_{t\varphi}$ 近似由慢转动黑洞解 (2.49a) 给出， $g_{t\varphi}^{(K)}$ 是 Kerr 黑洞的度规分量。径向坐标 r 取为卫星高度， ε 是对应卫星的测量不确定度。代入不确定度和大致高度

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx 10\%(\text{LAGEOS}), 20\%(\text{GPB}), \\ r &\approx 2R_{\oplus}(\text{LAGEOS}), 1.1R_{\oplus}(\text{GPB})^{\textcircled{1}} \end{aligned}$$

得到

$$\bar{\xi} \lesssim 10^{28}, \quad (2.63)$$

对应的耦合常数的上限约为^[88]

$$\sqrt{\alpha} \lesssim 10^8 \text{ km}. \quad (2.64)$$

这远远超出了弱耦合近似的适用范围，因此这一约束是没有实际意义的。因为地球-人造卫星本身是个弱引力场系统，因此只能给出对 dCS 理论的一个很弱的约束。在对强引力系统——例如脉冲星和引力波观测中，上述观测不确定度 ε 可以达到更小，从而给出更紧的限制。

2.3.5 脉冲双星 PSR J0737-3039 观测

Yunes^[89]首次通过脉冲双星系统 PSR J0737-3039 的观测数据给出了对 dCS 理论上限的估计。该系统于 2003 年由澳大利亚的 Parkes 射电望远镜发现，总质量 $= (2.58 \pm 0.02)M_{\odot}$ ，其中 M_{\odot} 为太阳质量。脉冲信号周期 $\approx 22\text{ms}$ ，双星轨道周期 ≈ 2.4 小时，轨道椭率 ≈ 0.088 ^[123]。dCS 修正主要体现在对近心点进动的测量上，测量结果为 $= (16.88 \pm 0.1) \text{ deg/yr}$ ^[124]，不确定度 $\varepsilon \approx 0.0059$ ，远远小于 LAGEOS 和 GPB 的测量精度。代入方程 (2.62) 中，得到

$$\bar{\xi} \lesssim 10^3, \quad \sqrt{\alpha} \lesssim 10^4 \text{ km}. \quad (2.65)$$

这低于太阳系观测四个数量级，但是依然远远超过了弱耦合近似的适用范围。因此我们仍然需要继续寻求其他的观测方案对引力的宇称破缺进行检验。

^① R_{\oplus} 是地球平均半径。

2.4 线性化引力场方程

2.4.1 扰动的定义

在第 2.2 小节中我们研究了引力波在宇宙学背景时空中的传播。但是 dCS 理论不仅对传播效应存在修正，对引力波的产生过程也存在修正。为此，我们仿照广义相对论的做法^[91]，在平直时空背景下对引力场方程做线性化处理，首先将度规分离为背景部分和扰动部分

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} \quad (2.66)$$

其中 $|H_{\mu\nu}| \ll 1$ 。精确到扰动二阶的逆变度规张量是

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - H^{\mu\nu} + H^{\mu\alpha} H_{\alpha}^{\nu} + \mathcal{O}(H^2) \quad (2.67)$$

在此基础再将扰动分离为广义相对论的部分和 dCS 造成的修正^[125]，

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

其中 $k_{\mu\nu}$ 的量级相当于 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ 。先依据 $H_{\mu\nu}$ 进行引力场方程的扰动展开。引入

$$\begin{aligned} \bar{H}^{\mu\nu} &\equiv \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \\ &= H^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}H + \frac{1}{2}HH^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}H_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta} - \frac{1}{8}\eta^{\mu\nu}H^2 - H^{\mu\alpha}H_{\alpha}^{\nu} + \mathcal{O}(H^3), \end{aligned} \quad (2.69)$$

取迹得到 $\bar{H} = -H + \mathcal{O}(H^3)$ 。于是反迹的 dCS 度规 $\bar{k}^{\mu\nu}$ 是

$$\bar{k}^{\mu\nu} \equiv \bar{H}^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} = k^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}k + \mathcal{O}(k^2) \quad (2.70)$$

取迹后得到 $\bar{k} = -k + \mathcal{O}(k^2)$ ，并有 $k^{\mu\nu} = \bar{k}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\bar{k} + \mathcal{O}(k^2)$ 。

与广义相对论的情况相同，对称张量 $H_{\mu\nu}$ 最多只有 10 个独立分量，但由于广义协变性的要求，其中四个分量可以通过采用 Lorenz 规范固定坐标而消除，

$$\partial_{\mu}\bar{H}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.71)$$

等价地，在 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^0)$ 和 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ 阶次上，Lorenz 条件应当对 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 和 $\bar{k}_{\mu\nu}$ 分别成立，即

$$\partial_{\mu}\bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{\mu}\bar{k}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.72)$$

在广义相对论中我们可以进一步引入 TT 规范再消除四个规范自由度。不同的是，dCS 理论引入了新的标量自由度，这会影响到引力波度规中物理自由度的数量。因此我们目前还不能在 dCS 理论中给出进一步的规范。

2.4.2 场方程的线性和二阶扰动

1. 标量场扰动

不考虑势能函数 $V(\vartheta)$ ，将方程 (2.9) 左边的 d'Alembert 算符展开，右边代入 Riemann 张量的扰动表达式。dCS 引力下标量场是耦合常数 $\hat{\alpha}$ 量级，因此方程的源项也只需要保留到 $\mathcal{O}(\alpha)$ 量级。于是方程左边和右边分别化简得到

$$\begin{aligned}\square_g^2 \vartheta &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right] \vartheta \\ &= \square_\eta^2 \vartheta + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu h) (\partial_\nu \vartheta) - (\partial_\mu h^{\mu\nu}) (\partial_\nu \vartheta) - h^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \vartheta)\end{aligned}\quad (2.73)$$

和

$$-\frac{\alpha}{4\beta} R \hat{R} = -\frac{\alpha}{4\beta} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} (\partial_\rho \partial^\lambda h_{\mu\sigma}) \left(\partial_\alpha \partial^\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\alpha \partial_\lambda h_\beta^\mu \right), \quad (2.74)$$

其中只有 $\square_\eta^2 \vartheta$ 一项涉及到标量场的二阶导数，因此扰动标量场方程可以写为一个波动方程。除 $\square_\eta^2 \vartheta$ 以外的其他项作为标量场方程的源^[125]

$$\square_\eta^2 \vartheta = -16\pi\sigma, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}16\pi\sigma &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu h) (\partial_\nu \vartheta) - (\partial_\mu h^{\mu\nu}) (\partial_\nu \vartheta) - h^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \vartheta) \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\beta} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} (\partial_\rho \partial^\lambda h_{\mu\sigma}) \left(\partial_\alpha \partial^\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\alpha \partial_\lambda h_\beta^\mu \right).\end{aligned}\quad (2.76)$$

其中方程 (2.9) 左边贡献了标量场和引力场之间的耦合，方程右侧由引力场二阶扰动的贡献。需要注意的是，标量场方程显然是不完整的，因为方程右侧没有表示物质分布的项，这意味着之后计算出来的标量辐射是没有物质起源的。在第2.5节中，我们会通过有效场论的方法补齐这一项。

2. 张量场扰动

引力场方程 (2.7) 在精确到 $\mathcal{O}(H^2)$ 、 $\mathcal{O}(\vartheta H)$ 和 $\mathcal{O}(\vartheta^2)$ 阶次时可以分别写为如下形式

$$\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{H}) + \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) + 16\pi\alpha \mathbf{C}^{(2)}(\vartheta, \mathbf{H}) = 8\pi \left[\mathbf{T}^{(m)} + \delta\mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T}^{(\vartheta)} \right]. \quad (2.77)$$

接着再将这一方程按照 $\mathbf{H} = \mathbf{h} + \mathbf{k}$ 分解为广义相对论和 dCS 修正部分。由于我们已经知道 $\vartheta \sim \mathcal{O}(\hat{\alpha})$ 和 $\mathbf{k} \sim \mathcal{O}(\hat{\alpha}^2)$ ，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{h}) + \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \alpha^2 \left[\delta\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta\mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \right] \\ + 16\pi\alpha^2 \mathbf{C}^{(2)}(\vartheta, \mathbf{h}) = 8\pi \left[\mathbf{T}^{(m)} + \alpha^2 \delta\mathbf{T}^{(m)} + \alpha^2 \mathbf{T}^{(\vartheta)} \right].\end{aligned}\quad (2.78)$$

其中广义相对论部分的方程是 $\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{h}) + \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 8\pi\mathbf{T}^{(m)}$ ，具体写出是^[126]

$$\square_\eta^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi \left[(1+h) T_{\mu\nu}^{(m)} + (16\pi)^{-1} \Lambda_{\mu\nu}^{(2)} \right], \quad (2.79)$$

其中

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(2)} = 16\pi T_{\mu\nu}^{(\text{LL})} + (\partial^\beta \bar{h}_{\alpha\mu})(\partial^\alpha \bar{h}_{\beta\nu}) - (\partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\mu\nu}) \bar{h}_{\alpha\beta}, \quad (2.80)$$

以及 $T_{\mu\nu}^{(\text{LL})}$ 是精确到扰动二阶 Landau-Lifshitz 能动张量^[126],

$$\begin{aligned} 16\pi T_{\mu\nu}^{(\text{LL})} &= (\partial_\alpha \bar{h}_\mu^\lambda)(\partial^\alpha \bar{h}_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\lambda})(\partial_\alpha \bar{h}_\lambda^\beta) - (\partial_\mu \bar{h}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{h}_{\lambda\nu}) \\ &\quad - (\partial_\nu \bar{h}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{h}_{\lambda\mu}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{h}^{\lambda\sigma})(\partial_\nu \bar{h}_{\lambda\sigma}) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \bar{h})(\partial_\nu \bar{h}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \bar{h}^{\lambda\sigma})(\partial^\alpha \bar{h}_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{8} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \bar{h})(\partial^\alpha \bar{h}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

对于 dCS 修正的部分, 引力波场方程的形式为 $\delta\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta\mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{k}) + 16\pi\alpha\mathbf{C}^{(2)}(\vartheta, \mathbf{h}) = 8\pi [\delta\mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T}^{(\vartheta)}]$, 具体写出后得到^[125]

$$\square_\eta^2 \bar{k}_{\mu\nu} = -16\pi K_{\mu\nu}, \quad (2.82)$$

源项是

$$K_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}^{(m)} + (1+h)\delta T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(\vartheta)} + (16\pi)^{-1} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - 2\alpha \tilde{\mathbf{C}}_{\mu\nu}. \quad (2.83)$$

其中 $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ 代表等效能动张量 $\Lambda_{\mu\nu}$ 关于 dCS 形变张量 $\bar{k}_{\mu\nu}$ 的线性阶次, 即

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} &= 16\pi \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\text{LL})} + (\partial^\beta \bar{h}_{\alpha\mu})(\partial^\alpha \bar{k}_{\beta\nu}) \\ &\quad + (\partial^\beta \bar{k}_{\alpha\mu})(\partial^\alpha \bar{h}_{\beta\nu}) - (\partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\mu\nu}) \bar{k}_{\alpha\beta} - (\partial^\alpha \partial^\beta \bar{k}_{\mu\nu}) \bar{h}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\text{LL})}$ 代表精确到 \mathbf{k} 线性阶次的 Landau-Lifshitz 张量

$$\begin{aligned} 16\pi \tilde{T}_{\mu\nu}^{(\text{LL})} &= (\partial_\alpha \bar{h}_\mu^\lambda)(\partial^\alpha \bar{k}_{\lambda\nu}) + (\partial_\alpha \bar{k}_\mu^\lambda)(\partial^\alpha \bar{h}_{\lambda\nu}) + \eta_{\mu\nu} (\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\lambda})(\partial_\alpha \bar{k}_\lambda^\beta) \\ &\quad - (\partial_\mu \bar{h}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{k}_{\lambda\nu}) - (\partial_\mu \bar{k}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{h}_{\lambda\nu}) - (\partial_\nu \bar{h}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{k}_{\lambda\mu}) - (\partial_\nu \bar{k}^{\beta\lambda})(\partial_\beta \bar{h}_{\lambda\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{h}^{\lambda\sigma})(\partial_\nu \bar{k}_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{k}^{\lambda\sigma})(\partial_\nu \bar{h}_{\lambda\sigma}) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \bar{h})(\partial_\nu \bar{k}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu \bar{k})(\partial_\nu \bar{h}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \bar{h}^{\lambda\sigma})(\partial^\alpha \bar{k}_{\lambda\sigma}) + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \bar{h})(\partial^\alpha \bar{k}), \end{aligned} \quad (2.85)$$

精确到扰动二阶的 C-张量是

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta_{(\mu|\lambda} \epsilon^{\rho\lambda\alpha\beta} \partial_\alpha [\square_\eta^2 h_{\nu)\beta}] (\partial_\rho \vartheta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{(\nu|\lambda} \epsilon^{\rho\lambda\alpha\beta} \left[\partial_\alpha \partial_\mu h_\beta^\sigma - \partial_\alpha \partial^\sigma h_{\beta|\mu} \right] (\partial_\sigma \partial_\rho \vartheta). \end{aligned} \quad (2.86)$$

显然方程两边都处于耦合常数的二阶。

方程 (2.83) 中包含五项: 其中 $\delta T_{\mu\nu}^{(m)}$ 代表了 dCS 理论对物质能动张量的修正。例如 dCS 理论对孤立慢转动黑洞的修正就属于这类情况, 这部分的表达式将在第 2.5 节中通过有效场论方法构造出来。 $kT_{\mu\nu}^{(m)}$ 和 $h\delta T_{\mu\nu}^{(m)}$ 两项描述了度规扰动与物质场的耦合。 $T_{\mu\nu}^{(\vartheta)}$ 是标量场的贡献, 因为它本身也是一种有动力学特性的物质。此外, $(16\pi)^{-1} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ 代表了度规二阶扰动的贡献, $-2\alpha \tilde{\mathbf{C}}_{\mu\nu}$ 代表了标量场和度规场之间耦合的贡献。除了 $\delta T_{\mu\nu}^{(m)}$ 外其他部分都已经可以确切计算。

2.5 自旋粒子在弯曲时空中的运动

广义相对论将引力描述为弯曲的时空，那么粒子在引力场中的运动轨迹就是弯曲时空的测地线，满足测地线方程。但是与 Newton 引力不同的是，相对论粒子的自旋对运动和引力场产生影响，会对测地线方程产生修正。从孤立黑洞解的讨论可知，dCS 对无自旋粒子的时空结构没有修正。因此想要探究 dCS 引力中双黑洞系统的运动和辐射，就必须从自旋粒子的运动出发。这就需要用到有效场论方法来确定自旋对测地线方程的修正。

2.5.1 协变旋转张量

有效场论是一种通过分析动力学自由度和对称性以确定体系 Lagrange 函数，进而通过变分原理确定系统的运动方程和能动张量的研究方法^[127]。首先我们讨论系统自由度的问题^[128]。自旋粒子是一个没有内部结构的理想模型，与经典力学中的刚体类似，它具有三个平动自由度和三个转动自由度。

设一个粒子背景度规 $g_{\mu\nu}$ 中沿世界线 $z^\mu(\tau)$ 运动，那么它的四维速度是， $u^\mu = dz^\mu/d\tau$ 。 τ 是粒子的固有时间。对有质量粒子而言，其四维速度是类时矢量，总是满足归一化条件， $u_\mu u^\mu = -1$ ，因此只有三个独立分量，代表了粒子的三个平动自由度。

为了考虑内禀自旋自由度，我们定义一个与粒子固连的标架，记做 $e_{(\alpha)}^\mu$ 。其中不带括号的指标代表坐标的指标，带括号的指标代表了标架轴的序号。标架 $e_{(\alpha)}^\mu$ 满足正交关系 $g_{\mu\nu} = \eta_{(\alpha)(\beta)} e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu$ 和 $\eta_{(\alpha)(\beta)} = g_{\mu\nu} e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu$ 。基矢 $e_{(\alpha)}^\mu$ 的变化率可以用该基矢展开，展开系数记为张量 $\Omega_{\mu\nu}$ ，即

$$\frac{D}{D\tau} e_{(\alpha)}^\mu = -\Omega^{\mu\nu} e_{(\alpha)\nu}, \quad \Omega^{\mu\nu} = e^{(\alpha)\mu} \left[\frac{D}{D\tau} e_{(\alpha)}^\nu \right]. \quad (2.87)$$

其中沿世界线的方向导数为 $D/D\tau \equiv u^\lambda \nabla_\lambda$ 。不难证明该张量为反对称张量，存在六个自由度。与一个直接关联于背景的标架 $\hat{e}_{(\alpha)}^\mu$ 之间通过

$$e_{(\beta)}^\mu = \Lambda_{(\beta)}^{(\alpha)} \hat{e}_{(\alpha)}^\mu, \quad (2.88)$$

相关联，其中 $\Lambda_{(\beta)}^{(\alpha)}$ 表示 Lorentz 变换矩阵，也包含六个自由度，其中三个代表了空间转动，另外三个代表了相对论推动。这也就对应了反对称张量 $\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 六个分量的含义——其中三个代表了粒子相对于背景时空的转动，即自旋，另外三个代表了粒子沿世界线的运动。此后，我们通过引入自旋补充条件 (spin supplementary condition)^[129] 消除平动自由度。因此，反对称张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 正是协变旋转张量，它描述了粒子在度规 $g_{\mu\nu}$ 中沿测地线运动时受引力场影响而产生的转动角速度。

2.5.2 Lagrange 函数

1. 对称性和偶极近似

完成了对自由度和动力学变量的讨论，本节开始构造弯曲时空中旋转粒子 Lagrange 函数。由于该粒子只存在六个自由度，外部仅存在引力场，那么粒子的 Lagrange 函数必然只依赖于四维速度 u^μ 、旋转张量 $\Omega^{\mu\nu}$ 和背景时空度规 $g_{\mu\nu}$ 及其导数，即

$$L_m = L_m(u^\mu, \Omega^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}, \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta}, \dots). \quad (2.89)$$

对应作用量是

$$S_m = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau L_m(\tau) \quad (2.90)$$

我们假定 Lagrange 函数在偶极近似下只显性依赖于 u^μ 、 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ ，并要求作用量具备以下三种对称性：

- 重参数协变：在变换 $\tau \rightarrow \lambda\tau$ 下，作用量保持不变，其中 λ 是任意常数。
- Lorentz 协变：作用量已经表述为张量形式，因此必然是 Lorentz 协变的。
- 微分同胚协变：在坐标微分变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ 作用量保持不变。

首先考察重参数协变性。由于在 $\tau \rightarrow \lambda\tau$ 变换下 $d^4x \rightarrow \lambda d^4x$ ，于是我们需要 L_m 按照 $L_m \rightarrow \lambda^{-1}L_m$ 变换。根据四维速度和角速度张量的定义，我们得到 $u^\mu \rightarrow \lambda^{-1}u^\mu$ 和 $\Omega^{\mu\nu} \rightarrow \lambda^{-1}\Omega^{\mu\nu}$ 。因此 Lagrange 函数满足

$$L_m(\lambda^{-1}u^\mu, \lambda^{-1}\Omega^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}) = \lambda^{-1}L_m(u^\mu, \Omega^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}), \quad (2.91)$$

即 L_m 是关于 u^μ 和 $\Omega^{\mu\nu}$ 的一次齐次函数。根据齐次函数的 Euler 定理， L_m 必然可以写为

$$L_m = p_\mu u^\mu + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}. \quad (2.92)$$

其中对应动力学变量 u^μ 和 $\Omega^{\mu\nu}$ ，我们定义了共轲动量 $p_\mu \equiv (\partial L_m)/(\partial u^\mu)$ 和 $S_{\mu\nu} \equiv 2(\partial L_m)/(\partial \Omega^{\mu\nu})$ ，分别代表粒子的动量和自旋角动量。在偶极近似下，共轲动量 p^μ 正比于粒子的四维速度 u^μ ，记做 $p^\mu = m u^\mu$ 。其中比例系数

$$m^2 = -p_\mu p^\mu, \quad (2.93)$$

代表了粒子的静止质量。在导出粒子的运动方程后，不难证明静止质量在偶极近似下沿世界线守恒。

对应于 Lorentz 变换的六个独立分量，协变旋转张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 和自旋角动量张量 $S^{\mu\nu}$ 也有六个独立分量。但是 $\Omega_{\mu\nu}$ 仅有三个自由度代表了空间转动。因此 $S^{\mu\nu}$ 也仅有三个分量代表物理的自由度。因此需要引入自旋补充条件以消除多余的自由度。一种常用的选择方式是 Tulczyjew 补充条件^[130]

$$S^{\mu\nu} p_\mu = 0. \quad (2.94)$$

在消除了自旋张量的残余自由度后，我们可以定义协变的四维自旋矢量，

$$S_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^\alpha S^\beta. \quad (2.95)$$

该定义自动满足了 Tulczyjew 补充条件 2.94。但是 S^μ 也有四个独立分量，因此还需要引入新的约束条件

$$S_\alpha u^\alpha = 0. \quad (2.96)$$

以消除它的额外自由度，即自旋矢量与四维速度矢量正交。从 (2.95) 可以得到

$$S^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} u_\gamma S_{\alpha\beta}. \quad (2.97)$$

矢量 S^μ 与四维速度正交的分量记做 \mathbf{S} ，可以认为是粒子的三维自旋角动量矢量。

2. 四极近似

因为偶极近似已经占用了粒子可能的所有自由度，所以四极近似的 Lagrange 函数只能代表自旋导致的四极矩与背景时空之间的耦合。最简单的一种构造方法是采用 Riemann 张量，并将 Lagrange 函数写为

$$L_m(u^\mu, \Omega^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}) = p_\mu u^\mu + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} J^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.98)$$

其中 $J^{\alpha\beta\gamma\delta} = -6(\partial L_m)/(\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta})$ 称为 Dixon 张量^[131-133]，代表了粒子自旋诱导的四极矩。为保证最后一项对 Lagrange 函数有非零的贡献，需要保证张量 $J^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 具备与 Riemann 张量完全相同的对称性。通过量纲分析可知， $[J] = [S]^2 [u]^2 [\mathbf{m}]^{-1}$ 。

我们通过考察 Dixon 张量的对称性来确定它的具体形式。由于 Dixon 张量由两个四维速度矢量 u^μ 和两个自旋角动量张量 $S^{\mu\nu}$ 构造而成，一共涉及到六个指标，而 Dixon 四极矩最终只有四个指标，因此需要缩并掉一组指标。考虑到自旋补充条件 $S_{\mu\nu} u^\mu = 0$ ，因此缩并不能发生在自旋角动量和四维速度之间。由于粒子轨迹类时特性 $u^\mu u_\mu = -1$ ，因此也不能发生在四维速度之间。进而，这一缩并必然发生在两个自旋角动量张量之间。因此 Dixon 张量需包含形如 $S^{\alpha\lambda} S^\beta_\lambda$ 的因子。此时的 α 和 β 两个指标是对称的，因此不可能对应 Dixon 张量的前两个或后两个指标，于是只能对应前两个指标和后两个指标各一个，例如第二和第三个指标。再考虑两个四维速度，Dixon 张量应当具有 $u^\alpha S^{\beta\lambda} S^\gamma_\lambda u^\delta$ 的形式。将前两个指标和后两个指标做反对称化，即可得到 Dixon 张量的形式为

$$J^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -\frac{3}{\mathbf{m}} u^{[\alpha} S^{\beta]\lambda} S^{[\gamma} u^{\delta]}. \quad (2.99)$$

其中 [...] 代表了反对称化操作，例如 $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$ 。利用协变角动量矢量 (2.95)，Dixon 张量等价地表示为

$$J^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{3}{\mathbf{m}} \{ u^{[\alpha} S^{\beta]} S^{[\gamma} u^{\delta]} - S^2 u^{[\alpha} g^{\beta][\gamma} u^{\delta]} \}. \quad (2.100)$$

其中 $S^2 \equiv S_\alpha S^\alpha = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ 。不难验证 Dixon 张量 (2.100) 与 Riemann 张量有着相同的对称性，且满足恒等式 $J^{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0$ 。

3. dCS 修正和 Lagrange 函数对标量场的依赖

下面我们继续推广粒子的 Lagrange 函数。引入对标量场的依赖时，除了保证 Lagrange 函数满足重参数协变、Lorentz 协变和微分同胚协变外，还需要使其满足^[134]

- 平移协变性：作用量在标量场变换 $\vartheta \rightarrow \vartheta' = \vartheta + \text{constant}$ 下保持不变。
- 宇称变换协变：作用量在宇称变换 $\vartheta \rightarrow \vartheta' = \hat{P}[\vartheta]$ 下保持不变。

平移协变性显然要求修正后的 Lagrange 函数不显含 ϑ ，因此只能依赖于标量场的一阶协变导数 $\nabla_\mu \vartheta$ 。

那么如何在四维流形上讨论宇称变换呢？宇称变换是指对空间坐标取相反数的操作，即 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ 。但广义相对论是四维的时空理论，张量场同时包含时间指标和空间指标，它们的宇称不能直接从张量本身去看，而应当将宇称变换定义为一个等时类空超曲面上的空间反演操作。在这样一个超曲面上建立一组时空坐标，记做 $y_{(\alpha)}$ ，其中第零个分量为常数，代表在该超曲面上时间分量相等。那么时空坐标 x^μ 与这组坐标之间的变换就构成了一个投影算符，

$$\bar{e}_{(\alpha)}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y_{(\alpha)}}, \quad (2.101)$$

张量场 A_μ 向这一超曲面上的投影记做

$$A_{(\alpha)} = A_\mu \bar{e}_{(\alpha)}^\mu. \quad (2.102)$$

于是，宇称变换可以定义为 $y_{(\alpha)} \rightarrow -y_{(\alpha)}$ ，于是有

$$\hat{P} \left[\bar{e}_{(\alpha)}^\mu \right] = -\bar{e}_{(\alpha)}^\mu. \quad (2.103)$$

那么任何一个张量在坐标系 $\bar{e}_{(\alpha)}^\mu$ 上的投影所具有的宇称应当回到三维空间反演的情形，即矢量具有奇宇称，赝矢量具有偶宇称，四阶张量具有偶宇称，四阶赝张量具有奇宇称，

$$\hat{P} [p_{(\alpha)}] = -p_{(\alpha)}, \quad \hat{P} [S_{(\alpha)}] = S_{(\alpha)}, \quad \hat{P} [\epsilon_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}] = -\epsilon_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}, \quad (2.104)$$

考虑到坐标轴本身的宇称变换，可以得到这些张量在四维时空流形上具有

$$\hat{P} [p_\mu] = p_\mu, \quad \hat{P} [S_\mu] = -S_\mu, \quad \hat{P} [\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}] = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.105)$$

于是慢转动黑洞解给出的标量场解 ϑ 具有奇宇称 $\hat{P}[\vartheta] = -\vartheta$ 。那么对于协变导数，有

$$\hat{P} [\nabla_{(\alpha)} \vartheta] = \nabla_{(\alpha)} \vartheta, \quad \text{和} \quad \hat{P} [\nabla_\mu \vartheta] = -\nabla_\mu \vartheta. \quad (2.106)$$

要使得自旋粒子的作用量在宇称变换下协变，就需要 Lagrange 函数具有偶宇称。这就要求了 $\nabla_\mu \vartheta$ 的系数必然是奇宇称。同时考虑到这一系数代表了自旋粒子的标量偶极矩，根据慢转动黑洞解 (2.48)，它需要正比于自旋角动量。由于 S^μ 和 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是奇宇称， u_γ 是偶宇称，因此能构造出来的偶宇称标量只能是，

$$\hat{S}_\mu^\alpha u^\mu (\nabla_\alpha \vartheta), \quad \hat{S}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}.$$

于是在考虑 dCS 修正后，自旋粒子的 Lagrange 函数是^[134]

$$\begin{aligned} L_m(u^\mu, \Omega^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \nabla_\mu \vartheta) = & p_\mu u^\mu + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{6} (1 + \delta C_Q) J^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{m^2} \delta C_\vartheta \hat{S}_\mu^\alpha u^\mu (\nabla_\alpha \vartheta). \end{aligned} \quad (2.107)$$

其中还引入了 dCS 引力对自旋诱导四极矩的可能修正， δC_Q 和 δC_ϑ 是修正常数，这两个常数将会在后文的讨论中与慢转动黑洞解相互匹配而确定。

4. Lagrange 函数的微分同胚协变性

其次，我们转向考察微分同胚变换协变性。在坐标平移 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha)$ 下，物理量沿位移矢量 ξ^μ 的 Lie 导数是

$$\delta_\xi g^{\mu\nu} = \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu, \quad (2.108a)$$

$$\delta_\xi u^\mu = u^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu, \quad (2.108b)$$

$$\delta_\xi \Omega^{\mu\nu} = \Omega^{\mu\beta} \partial_\beta \xi^\nu + \Omega^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu, \quad (2.108c)$$

$$\delta_\xi (\nabla_\mu \vartheta) = (\partial^\alpha \xi_\mu) (\nabla_\alpha \vartheta), \quad (2.108d)$$

$$\delta_\xi R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\alpha\nu\rho\lambda} (\partial^\alpha \xi_\mu) + R_{\mu\beta\rho\lambda} (\partial^\beta \xi_\nu) + R_{\mu\nu\gamma\lambda} (\partial^\gamma \xi_\rho) + R_{\mu\nu\rho\delta} (\partial^\delta \xi_\lambda). \quad (2.108e)$$

进而可以计算 Lagrange 函数 (2.107) 沿 ξ 的变分，

$$\begin{aligned} \delta_\xi L_m = & \left[p^\mu u_\nu + S^\mu_\lambda \Omega^\lambda_\nu - 2 \frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\alpha}} g_{\nu\alpha} \right. \\ & \left. + \frac{1}{m^2} \delta C_\vartheta \hat{S}_\lambda^\mu u^\lambda (\nabla_\nu \vartheta) - \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\mu\alpha\rho\lambda} R_{\nu\alpha\rho\lambda} \right] (\partial^\nu \xi_\mu). \end{aligned} \quad (2.109)$$

微分同胚协变性要求该 Lie 导数为零，于是给出约束关系

$$\frac{\partial L_m}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} p^\mu u^\nu + \frac{1}{2} S^\mu_\alpha \Omega^{\nu\alpha} + \frac{1}{2m^2} \delta C_\vartheta \hat{S}_\lambda^\mu u^\lambda (\nabla^\nu \vartheta) - \frac{1}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\mu\alpha\rho\lambda} R^\nu_{\alpha\rho\lambda}. \quad (2.110)$$

2.5.3 变分原理、运动方程和能量动量张量

通过对对称性的考虑，我们构造出了弯曲时空中自旋粒子的 Lagrange 函数 (2.92) 及其作用量 (2.90)。根据最小作用量原理，粒子的动力学必然对应了作用量的极小值。为了实现“粒子”的描述，我们将作用量 (2.90) 改写为

$$S_m \rightarrow \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau L_m(\tau) \delta^{(4)} \quad (2.111)$$

其中 $\delta^{(4)} \equiv \delta^{(4)}(x^\mu - z^\mu(\tau))$ 是四维 δ -函数。于是作用量 (2.111) 沿世界线变分得到

$$\begin{aligned} \Delta S_m = & \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[p_\mu (\Delta u^\mu) + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} (\Delta \Omega^{\mu\nu}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} (1 + \delta C_Q) J^{\alpha\beta\gamma\delta} \Delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{m^2} \delta C_g \hat{S}_\mu^\alpha u^\mu \Delta (\nabla_\alpha \vartheta) \right] \delta^{(4)}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

其中变分算符 Δ 定义为 $\Delta = \delta_z + \delta z^\mu \nabla_\mu$ 。 δ_z 代表沿世界线对张量场的内禀变分。 δz^μ 是世界线的微小变化，正比于 δz^μ 的项对应了世界线的偏移，其中 $\delta = \delta_z + \delta z^\alpha \partial_\alpha$ 。计算给出四维速度的变分是

$$\Delta u^\mu = \delta \left(\frac{dz^\mu}{d\tau} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \delta z^\beta = \frac{D}{D\tau} (\delta z^\mu), \quad (2.113)$$

对旋转张量的变分由

$$\begin{aligned} \Delta \Omega^{\mu\nu} = & \frac{D}{D\tau} (\Delta \Theta^{\mu\nu}) + (\Omega_\lambda^\nu \Delta \Theta^{\lambda\mu} - \Omega_\lambda^\mu \Delta \Theta^{\lambda\nu}) \\ & + \frac{1}{2} (\Omega^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} - \Omega^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) \delta_z g_{\alpha\beta} + e^{(\alpha)\mu} \left[\frac{D}{D\tau} (\delta z^\lambda) \right] \left[\nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \right] \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g^{\gamma\nu} u^\lambda \left[\nabla_\beta (\delta_z g_{\lambda\gamma}) - \nabla_\gamma (\delta_z g_{\lambda\beta}) \right] + u^\lambda \delta z^\gamma R_{\lambda\gamma}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

给出，其中

$$\Delta \Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left[e^{(\alpha)\mu} \Delta e_{(\alpha)}^\nu - e^{(\alpha)\nu} \Delta e_{(\alpha)}^\mu \right]. \quad (2.115)$$

方程 (2.114) 的证明过程比较复杂，可以参见补充材料A.2。对 Riemann 张量和 $\nabla_\alpha \vartheta$ 的变分分别是

$$\Delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \delta_z R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta z^\mu \nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.116)$$

$$\Delta (\nabla_\alpha \vartheta) = \delta_z (\nabla_\alpha \vartheta) + \delta z^\mu (\nabla_\mu \nabla_\alpha \vartheta). \quad (2.117)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_z R_{\alpha\beta\gamma\delta} = & \frac{1}{2} \left\{ \nabla_\gamma \left[\nabla_\delta (\delta_z g_{\alpha\beta}) + \nabla_\beta (\delta_z g_{\delta\alpha}) - \nabla_\alpha (\delta_z g_{\delta\beta}) \right] \right. \\ & \left. - \nabla_\delta \left[\nabla_\gamma (\delta_z g_{\beta\alpha}) + \nabla_\beta (\delta_z g_{\gamma\alpha}) - \nabla_\alpha (\delta_z g_{\gamma\beta}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

将方程 (2.113 - 2.117) 代入 (2.112)，得到^[134]

$$\begin{aligned} \Delta S_m = & \int d^4x \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left[p^\mu u^\nu \delta^{(4)} - \nabla_\lambda (S^{\lambda\mu} u^\nu \delta^{(4)}) - \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) \nabla_\alpha \nabla_\beta (J^{\mu\alpha\beta\nu} \delta^{(4)}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\delta C_g}{m^2} \hat{S}_\sigma^\mu u^\sigma (\nabla^\nu \vartheta) \delta^{(4)} - \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\mu\alpha\rho\gamma} R_{\alpha\rho\gamma}^\nu \delta^{(4)} \right] (\delta_z g_{\mu\nu}) - \frac{\delta C_g}{m^2} \nabla_\alpha \left[\hat{S}_\mu^\alpha u^\mu \delta^{(4)} \right] (\delta_z \vartheta) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} S_{\alpha\beta} u^\lambda R_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} + \frac{\delta C_g}{m^2} \hat{S}_\lambda^\alpha u^\lambda (\nabla_\mu \nabla_\alpha \vartheta) - \frac{1}{6} (1 + \delta C_Q) J^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \left(\frac{Dp_\mu}{D\tau} \right) \right] \delta z^\mu \delta^{(4)} \right. \\ & \left. + \left[p_{[\mu} u_{\nu]} + \frac{\delta C_g}{m^2} u^\lambda \hat{S}_{\lambda[\mu} (\nabla_{\nu]} \vartheta) + \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\rho\lambda\alpha}{}_{[\mu} R_{\nu]\alpha\rho\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{DS_{\mu\nu}}{D\tau} \right) \right] \Delta \Theta^{\mu\nu} \delta^{(4)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

在推导中我们设定了边界条件

$$\delta z^\mu(-\infty) = \delta z^\mu(+\infty) = 0, \quad \text{和} \quad \Delta\Theta^{\mu\nu}(-\infty) = \Delta\Theta^{\mu\nu}(+\infty) = 0. \quad (2.120)$$

作用量的变分 (2.119) 分为四项, 依次正比于背景度规的变分 $\delta_z g_{\mu\nu}$ 、标量场的变分 $\delta_z \vartheta$ 、角度的变分 $\Delta\Theta$ 和世界线的变分 δz^μ 、这些变分之间相互独立。令 $\Delta S_m = 0$, 将分别得到粒子的能动张量、标量场源的紧致部分、运动方程和进动方程。这样就完成了对自旋粒子作用量的变分。接下来我们分别对变分中给出的各项进行介绍。

1. 运动方程

作用量的变分 (2.119) 分为四个部分, 其中对旋转角的变分 $\Delta\Theta^{\mu\nu}$ 给出了粒子自旋角动量的演化方程, 对世界线坐标变量 z^μ 的变分 δz^μ 给出粒子的运动方程。它们分别是

$$\frac{Dp_\mu}{D\tau} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} u^\lambda R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{m^2} \delta C_\vartheta \hat{S}_\lambda{}^\alpha u^\lambda (\nabla_\mu \nabla_\alpha \vartheta) - \frac{1}{6} (1 + \delta C_Q) J^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\mu R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.121)$$

$$\frac{DS_{\mu\nu}}{D\tau} = 2p_{[\mu} u_{\nu]} + \frac{2}{m^2} \delta C_\vartheta u^\lambda \hat{S}_{\lambda[\mu} (\nabla_{\nu]} \vartheta) + \frac{4}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\rho\lambda}{}_{[\mu} R_{\nu]\alpha\rho\lambda}, \quad (2.122)$$

如果令与 dCS 修正相关的常数 δC_ϑ 和 δC_Q 为零, 那么将回到广义相对论情形, 相应方程称为 MPD 方程^[135-138]。方程 (2.121) 描述在弯曲时空中带自旋粒子沿世界线的运动, 方程 (2.122) 描述了粒子角动量的演化。其中 $p^\mu, u^\mu, S_{\mu\nu}$ 代表了这个粒子本身的内禀性质。 $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 代表了背景引力场在粒子世界线处的取值。可以看出, 四极修正与 dCS 理论给出的修正是自旋同阶的。最后, 为了使方程闭合, 还需要辅助以四维动量和四维速度之间的关系 $p^\mu = m u^\mu$, 其中 m 代表了运动粒子的静止质量。可以证明, 该质量在偶极近似下是守恒的, 但在四极近似下不再守恒。但我们无需对此表示担心, 在引入后牛顿近似后, 不守恒的部分将进入高阶修正当中, 不会对后续计算产生任何影响。

2. 能动张量

方程 (2.119) 中度规变分 $\delta_z g_{\mu\nu}$ 的系数给出了自旋粒子的能动张量, 做对称化处理后给出

$$T_{(m)}^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{-g}} \left\{ m u^\mu u^\nu \delta^{(4)} - \nabla_\alpha [S^{\alpha(\mu} u^{\nu)} \delta^{(4)}] - \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) \nabla_\alpha \nabla_\beta [J^{\mu\alpha\beta\nu} \delta^{(4)}] \right. \\ \left. + \frac{1}{m^2} \delta C_\vartheta u^\alpha \hat{S}_\alpha^{(\mu} [\nabla^{\nu)} \vartheta] \delta^{(4)} + \frac{2}{3} (1 + \delta C_Q) J^{\beta\gamma\alpha(\mu} R_{\alpha\beta\gamma}^{\nu)} \delta^{(4)} \right\}, \quad (2.123)$$

前三项都来自于粒子本身, 依次代表了单极矩、偶极矩和四极矩对能动张量的贡献。第四项是粒子标量偶极矩与外部标量场之间的相互作用, 第五项则是粒子四极矩与外部引力场之间的相互作用。

3. 标量场方程源项的紧致部分

此外，作用量变分 (2.119) 中还包含 $\delta_z(\nabla_\alpha \vartheta)$ 一项。这应当理解为标量场偶极矩贡献到标量场的源，可以类比能动张量的做法，定义等效标量荷密度

$$\rho_\vartheta = -\frac{\delta C_\vartheta}{4\pi\beta m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \hat{S}_\mu^\alpha u^\mu \nabla_\alpha \left[\frac{\delta^{(4)}(x^\mu - z^\mu)}{\sqrt{-g}} \right]. \quad (2.124)$$

如果考虑到 $\hat{S}_{\alpha\beta} = u_\alpha S_\beta - u_\beta S_\alpha$ ，标量密度 (2.124) 可以写为

$$\rho_\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mu^\alpha \partial_\alpha \left[\frac{\delta^{(4)}(x^\mu - z^\mu(\tau))}{\sqrt{-g}} \right]. \quad (2.125)$$

其中我们定义了协变的等效标量荷矢量，

$$\mu^\alpha \equiv \frac{\delta C_\vartheta}{4\pi\beta m^2} S^\alpha, \quad (2.126)$$

它对标量场的演化有相应的贡献，所以在考虑了黑洞的点粒子近似时，标量场方程 (2.9) 及其扰动方程 (2.75) 应当修正为^[125,134]

$$\square_g^2 \vartheta = -\frac{\alpha}{4\beta} \hat{R} R + 4\pi \rho_\vartheta, \quad (2.127)$$

$$\square_\eta^2 \vartheta = -16\pi\sigma + 4\pi \rho_\vartheta. \quad (2.128)$$

正如我们在方程 (2.75) 后面讨论的那样，原始的标量扰动方程显然缺乏物质分布带来的贡献。由于点粒子在数学上是一个无穷大的奇点，因此平直时空背景下的线性化引力场方程是无法还原这一效应的。而有效场论针对自旋粒子的对称性构造了 Lagrange 函数，可以对此给出相应的弥补。

2.6 本章小结

本章对一类典型的宇称破缺引力理论——dCS 理论进行了系统的回顾。从作用量和场方程出发，我们先后讨论了引力波传播的振幅双折射效应、孤立慢转动黑洞解、引力场方程的线性化，和描述自旋粒子在弯曲时空中运动的 MPD 方程及其 dCS 修正。一方面，黑洞解和双折射效应提供给我们一些检验引力宇称破缺的方法，如通过对地球人造卫星的数据分析和脉冲双星的观测等，但这些观测的精度都不足以对 dCS 理论施加有效的约束。这要求我们寻找并建模一种新的观测——引力波观测对其进行改进。另一方面，这些讨论都为后续章节处理双黑洞系统的运动和辐射提供了基础。例如，孤立黑洞解 (2.48, 2.49) 是描述双黑洞引力场的基础，双黑洞的运动方程应当由修正的 MPD 方程 (2.121, 2.122) 导出，引力辐射应当从线性化引力场方程 (2.75, 2.82) 的积分得到等。

第3章 dCS 引力下的双黑洞系统：运动方程和引力辐射

本章将一般性地研究 dCS 引力下双黑洞系统的运动和引力辐射，最终给出运动方程和引力辐射场的一般表达式。首先在第3.1节我们对后牛顿近似做一个简要的回顾。然后，我们在随后的两节关注双黑洞系统的近场区域。在第3.2节中，我们在后牛顿近似下求解线性化引力场方程的近场解，在第3.3节中，我们从近场解和修正 MPD 方程出发，给出双黑洞系统精确到后牛顿二阶的运动方程，并讨论系统的守恒量——结合能和轨道角动量。在本章最后两节，我们转向双黑洞系统的远场区域，分别在第3.4和3.5两节研究后牛顿的标量和引力辐射场。

3.1 后牛顿近似

描述自引力系统的运动是引力理论的基本目标之一。在 Newton 力学中，由于引力符合平方反比定律，二体的运动可以被完美地描述为 Kepler 问题^[91]。然而，广义相对论是一套高度非线性高度耦合的四维时空理论，二体问题变得极为复杂。像 Newton 力学那样的精确解析求解几乎是不可能得到的。同时，广义相对论还预言了引力波的存在，系统的运动直接决定了引力辐射，而引力辐射又会对系统的运动产生反作用，更加重了 Einstein 方程求解的困难程度。但人们也注意到，在低速和弱场极限下广义相对论与 Newton 力学趋于一致。这让我们自然地想到可以以 Newton 力学作为 Einstein 引力场方程的零阶近似，相对论性修正可以看做在 Newton 引力系统上的微扰，这样就建立起了后牛顿力学的理论框架。

3.1.1 时空分区

为方便后续的叙述，我们依据不同主导效应对整个时空进行分区——内场区域 (inner zone)、近场区域 (near zone)、远场区域 (far zone) 和传播区域 (propagation zone)。具体的分区方案展示在图 (3.1) 中。

- 内场区域：以双黑洞所在位置为中心，黑洞的引力半径为尺度。该区域的时空由黑洞主导，是强引力场区域，在两个圈内分别由两个黑洞各自的度规所描述，关于该区域的引力场已经在第2.3节进行了详细讨论。
- 近场区域：区域中心为双黑洞系统的质心，区域尺度约为双黑洞间距的数倍。在本文中，我们只考虑双星间距远大于黑洞的 Schwarzschild 半径的情形，这保证双黑洞的宏观运动速度远远小于真空光速。这是后续使用后牛顿近似研究它们的运动和辐射基本前提。在近场区域内，总的引力场可

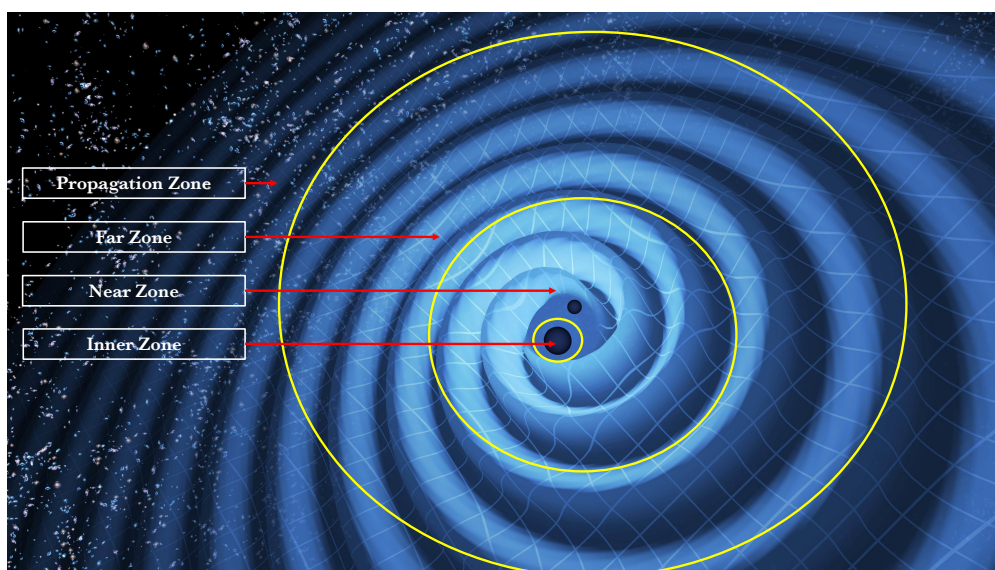


图 3.1 时空分区。本文仅考虑对一个孤立的双黑洞系统的引力波观测，因此将整个时空划分为四个部分——内场区域、近场区域、远场区域和传播区域。黄色圆形代表了区域间的大致分界，但这不是严格的。

背景图片来自 LIGO 网站：<https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160615f>。

以近似为双黑洞各自引力场的线性叠加，非线性部分可以放心地忽略，双黑洞各自在对方引力的支配下运动。后牛顿近似下的完整运动方程将在第 3.2 和 3.3 中给出。

- 远场区域：该区域仍然以双黑洞系统的质心为中心，其尺度约为特征引力波波长的数倍。该区域距离黑洞已经非常遥远，其中的背景引力场可以近似看做平直时空。双黑洞旋近在该区域激发引力辐射。我们后续的对引力波的计算将在该区域进行，完整的引力波辐射场将在第 3.4 和第 3.5 节中导出。此外，双黑洞并合过程的时标远小于宇宙膨胀的时标，因此在考虑双黑洞的演化和引力辐射过程中，无需考虑宇宙学背景的影响。
- 传播区域：整个时空除了上述三个区域之外的部分均为传播区域。双黑洞系统辐射的引力波在离开远场区域后即进入该区域，并经历长距离、长时标的传播。此时，宇宙学背景度规和背景标量场对引力波的影响不再是忽略的，dCS 引力中最重要的效应之一就是背景标量场的宇宙学演化驱动了引力波的振幅双折射效应。这一部分已经在第 2.2 节进行了讨论。

3.1.2 后牛顿理论的发展与现状

不妨设多体系统的特征速度为 v 、引力势的特征强度为 ϕ 。那么低速和弱场极限就可以表述为 $v \ll 1$ 和 $\phi \ll 1$ 。在 Newton 力学基础上的相对论修正可以看做对小参数 v 和 ϕ 的 Taylor 展开，从而实现 Einstein 引力场方程的逐阶求解。其中零阶近似记做 OPN，相对 OPN 的 $\mathcal{O}(v^n)$ 或 $\mathcal{O}(\phi^{n/2})$ 的修正记做 $(n/2)$ PN 近似。这一基本思想也决定了后牛顿展开只能对低速和弱场的系统适用。针对双黑洞

系统，则要求二者的间距要远大于黑洞各自的引力半径。图 (3.2) 展示了后牛顿展开、微扰论和数值相对论的适用范围。

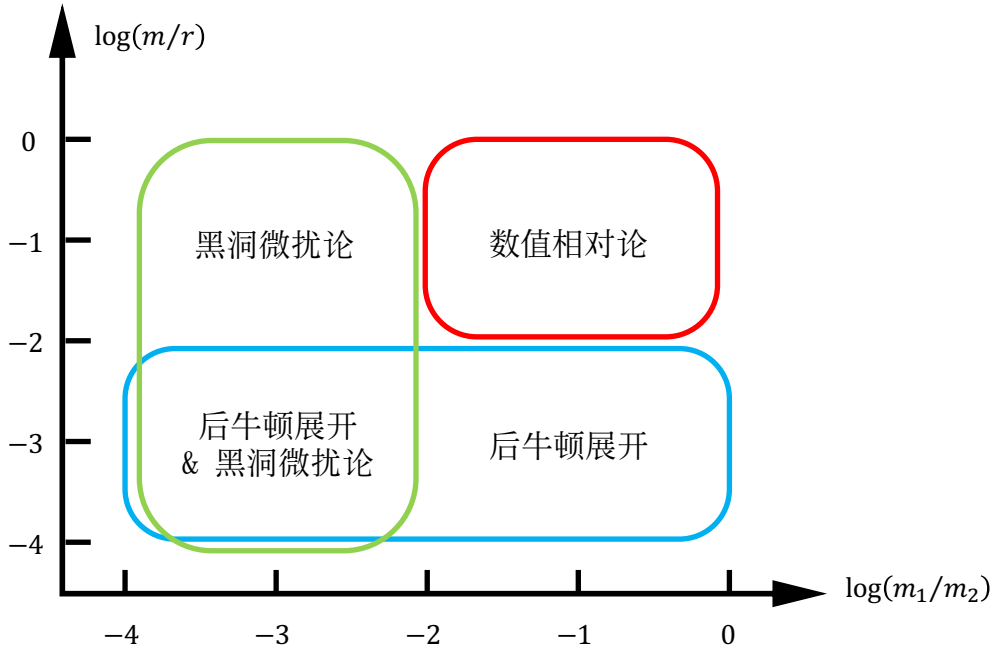


图 3.2 后牛顿展开、微扰论和数值相对论的适用范围。横轴代表了双星质量比的量级，其中 m_1, m_2 代表双星各自的质量。纵轴代表了引力势的强度， m 是双星系统总质量， r 是双星之间的间距。

早在广义相对论建立之初，后牛顿展开就被应用于引力场方程的求解，并对水星近日点的残余进动做出了精确的预测。1930 年代，Einstein、Infeld 和 Hoffmann 等人直接基于引力场方程建立了后牛顿理论的经典方法^[139]，通过定义一组超势 (superpotential) 描述物质场能量密度、内能、动能和势能的积分，从而对度规场逐阶表达。但是这一求解方案最终导致了其中一个超势的定义是模糊的，而方法本身又无法给出有效的限制^[91]。因此人们开始转向更加现代的后牛顿理论。

现代的后牛顿理论以引力场方程的 Landau-Lifshitz 形式^[91,126]出发，构造非微扰的波动方程为 $\square_g^2 h_{\mu\nu} = -16\pi\tau_{\mu\nu}$ 。该方程也称为松弛方程 (relaxed equation)。并将度规 $h_{\mu\nu}$ 和引力源按照万有引力常数 G 进行展开， $h_{\mu\nu} = Gh_{\mu\nu}^{(1)} + G^2h_{\mu\nu}^{(2)} + G^3h_{\mu\nu}^{(3)} + \dots$ 和 $\tau_{\mu\nu} = G\tau_{\mu\nu}^{(1)} + G^2\tau_{\mu\nu}^{(2)} + G^3\tau_{\mu\nu}^{(3)} + \dots$ ，这称为后闵可夫斯基展开 (post-Minkowskian expansion)。随后可以按照 G 的阶次进行迭代求解。第零次迭代仅给出背景场为平直时空。第一次迭代中，引力源 $\tau_{\mu\nu}^{(1)}$ 仅有物质场能动张量 $T_{\mu\nu}^{(m)}$ 贡献，从而给出近场度规和远场辐射的主导阶贡献。随后，在第二次迭代中，引力源 $\tau_{\mu\nu}^{(2)}$ 不仅依赖于物质场，也依赖于第一次迭代中得到的度规解，从而逐步给出引力场的高阶修正。而在对引力源 $\tau_{\mu\nu}^{(n)}$ 积分的过程中，一般将物质场视作质点系或流体，并引入针对物质场特征速度 v ，或光速倒数 $1/c$ 的展开，例如

$\tau_{\mu\nu}^{(1)} = \tau_{\mu\nu}^{(1,0)} + \frac{1}{c}\tau_{\mu\nu}^{(1,1)} + \frac{1}{c^2}\tau_{\mu\nu}^{(1,2)}$ ，同样进行逐阶迭代求解。这就完成对后牛顿理论框架的搭建^[91]。但需要说明的是，因为在引力场方程中引力常数 G 和光速 c 总是同步地出现，因此后闵可夫斯基展开和后牛顿展开并不是完全独立的两种近似，只不过前者更强调引力场是“弱的”，后者更强调物质运动是“慢的”。

在 0PN 阶次，双星按照 Newton 力学定律运动，并对应地产生引力波质量四极辐射^[30,140-141]。基于松弛方程迭代的 2.5PN 结果由 Damour 等人^[142]给出，并由 Blanchet 等人应用到点粒子系统^[143-145]。在低于 2.5PN 的阶次双星系统保持守恒，从 2.5PN 阶次开始双星的运动受到引力波辐射反作用 (radiation reaction) 的影响。相应的计算同样被推广到更高阶次，例如在 3PN 阶次^[146-148]，3.5PN 阶次^[149-151]，4PN 阶次^[152-155]和 4.5PN 阶次^[156]。

广义相对论与 Newton 引力的一个重要区别是天体自旋对引力场的贡献。领头阶的自旋贡献出现在 1.5PN 阶次，以自旋-轨道耦合 (spin-orbit coupling) 的形式影响双星的运动和引力辐射^[157-160]，次领头阶则以自旋-自旋耦合 (spin-spin coupling) 和单极-四极耦合 (monopole-quadrupole coupling) 的形式出现在 2PN 阶次^[157,161-165]。当黑洞的自旋矢量与轨道角动量方向不平行时，还会出现自旋进动效应，轨道角动量会围绕总角动量产生周期性的章动和进动，这一过程也会对双星的运动和引力辐射产生影响^[101-105,157,166]。

正如第 1.2 节所讨论的，引力波信号的提取和参数估计依赖于精确的引力波形模板。同时由于实时引力波预警的需要和引力波信号庞大的参数空间，模板的计算需要同时兼顾高效性。而后牛顿近似可以直接构建解析的波形模板，例如 TaylorT4 等^[167]，从而在引力波探测和参数估计相关研究中扮演了重要角色。

对修改引力理论的检验也要求我们必须修改引力框架下进行波形模板构建。而由于数值相对论的昂贵计算成本，后牛顿近似成为一种计算双星旋近阶段波形的常用方法。相关的研究包括在无质量 Brans-Dicke 引力^[168]、有质量 Brans-Dicke 引力^[169]、Einstein-aether 引力^[170]、有屏蔽机制的引力理论^[171-173]、Einstein-scalar-Gauss-Bonnet 引力^[93]和 Horndeski 引力^[174]中对引力波形的计算。

本文主要关注一类宇称破缺的引力理论——dCS 引力，并在该后牛顿框架下对这一引力中的双黑洞系统进行建模和波形模板解析计算。在后续两节 (3.2, 3.3) 中，我们关注近场区域的度规解，该部分仅包含了物质场对度规解的贡献。在本章最后两节 (3.4, 3.5) 中，我们分别在远场计算了双黑洞系统的标量和引力辐射。为方便起见并切合本文的目标，我们仅保留广义相对论在 0PN 和 dCS 修正的领头阶效应。广义相对论中的高阶后牛顿修正可以在前面引用的文献中找到，本文不再赘述。

3.1.3 关于线性化引力场方程结构的讨论

标量场和引力场的扰动方程 (2.128, 2.82) 都符合波动方程的形式：方程左边代表了场的动力学，方程右边代表了方程的源。无论在广义相对论还是 dCS 引力中，扰动方程右侧都包含了两类项。

- 其中一部分由物质场贡献，即包含 $T_{\mu\nu}^{(m)}$ 的部分，对于一般研究的引力辐射系统，物质场仅分布在有限的范围内。所以我们称 $T_{\mu\nu}^{(m)}$ 在数学上是紧致 (compact support) 的。例如质点系统就是由多个 δ -函数叠加构成。这部分是整个引力场分布的根源。
- 另外一部分则由二阶扰动贡献，这一部分在数学上是弥漫的，我们称之为非紧致 (non-compact support) 的部分。

紧致部分在对双星运动和辐射给出 $\mathcal{O}(G)$ 阶次的效应，而非紧致部分都是线性扰动的平方项，对应了 $\mathcal{O}(G^2)$ 阶次的修正。这就构成了后闵可夫斯基展开的基础，所以扰动方程应采用迭代方法求解。首先忽略非紧致部分，在物质场的近场区域积分物质场能动张量，得到近场区域的引力场，记做 $\bar{h}_{\mu\nu}^{(N)}$ 。该引力场主导了物质之间的相互作用和运动演化。将上述近场解继续代入扰动方程右侧，作为远场区域引力场的源，并通过推迟势积分得到 $\bar{h}_{\mu\nu}^{(F)}$ ，也就是引力辐射。这就构成了本章剩余章节的大致思路。

3.2 近场区域引力场的后牛顿解

3.2.1 标量场

我们只关心 dCS 引力修正的后牛顿主导阶效应，因此四维速度可以近似为 $u^\mu = (1, \boldsymbol{v})$ ，其中 $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{z}/dt$ 是粒子的运动速度，坐标时间 t 与固有时间 τ 的关系是 $dt/d\tau = u^0 = (1 - |\boldsymbol{v}|^2)^{-1/2}$ 。于是我们有近似 $\tau = t[1 + \mathcal{O}(v)]$ 和 $\sqrt{-g} = 1 + \mathcal{O}(v)$ 。

因此等效密度可以写为^[125]

$$\begin{aligned}
 \rho_g &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mu^\alpha \partial_\alpha \left[\frac{\delta^{(4)}(x^\mu - z^\mu(\tau))}{\sqrt{-g}} \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mu^i [\partial_i \delta^{(3)}(x^i - z^i(\tau))] \delta(t - z^0(\tau)) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mu^0 \delta^{(3)}(x^i - z^i(\tau)) [\partial_0 \delta(t - z^0(\tau))] \\
 &= \mu^i \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mu^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(\tau)) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t - \tau) \right] \\
 &= \mu^i \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) + \frac{\partial}{\partial t} [\mu^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t))] \\
 &= \underbrace{\mu^i \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t))}_{\rho_1} + \underbrace{\mu^i v^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t))}_{\rho_2} - \underbrace{\mu^i v^i v^j \partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t))}_{\rho_3}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中应用了自旋补充条件 (2.96)。利用标量荷密度定义 (2.126) 和三维速度 \mathbf{v} 得到

$$\mu^0 = \mu^i v_i = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.2}$$

因为标量扰动方程 (2.128) 右侧第二项中包含了 δ -函数，所以在近场区域必定是主导的源项，通过方程 (3.1) 可知

$$\rho_1 \sim \mathcal{O}(v^0), \quad \rho_2 \sim \mathcal{O}(v^1), \quad \rho_3 \sim \mathcal{O}(v^2), \tag{3.3}$$

因此 ρ_1 贡献了标量场近场解的最低阶贡献。对 ρ_1 做推迟势积分得到

$$g^{(N)} = \int \frac{\mu^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t)) d^3 \mathbf{x}' = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^3}. \tag{3.4}$$

对于双黑洞系统，总标量场应为两个黑洞各自标量场贡献的叠加，即

$$g^{(N)} = \sum_A \frac{\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \boldsymbol{\mu}_A}{r_A^2} = \sum_A \frac{\delta C_g}{4\pi \beta m_A^2} \frac{\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{S}_A}{r_A^2}. \tag{3.5}$$

其中 m_A 和 \mathbf{S}_A 和分别代表了黑洞 A 的质量和自旋角动量矢量。下标 A 是对各个黑洞的编号。 $r_A \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{z}_A|$ 代表了场点到源点 A 的距离， $\hat{\mathbf{n}} \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{z}_A)/r_A$ 代表了场点相对源点的方位。需要注意的是，标量场方程 (2.128) 是线性方程，因此上述线性叠加是完全成立的，而无需考虑是否使用弱场条件。

同时，近场标量解也可以由两个慢转动黑洞各自的标量场解 (2.48) 直接给出

$$g^{(N)} = \sum_A -\frac{5}{8} \frac{\alpha}{\beta m_A^2} \frac{\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{S}_A}{r_A^2}, \tag{3.6}$$

与方程 (3.5) 对比，可以确定有效场论中的修正系数 δC_g 为

$$\delta C_g = -\frac{5}{2} \pi \alpha. \tag{3.7}$$

这一修正常数对不同天体是相同的。到此，我们完成了对标量近场解的讨论。

3.2.2 引力场

在广义相对论中，精确到 2PN 阶次的近场度规是 $g_{\mu\nu}^{(N)} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^{(N)}$, $H_{\mu\nu}^{(N)} = h_{\mu\nu}^{(N)} + \mathfrak{h}_{\mu\nu}^{(N)}$, 其中

$$h_{00}^{(N)} = \underbrace{2\bar{U}}_{(0\text{PN})} - \underbrace{2\bar{U}^2}_{(1\text{PN})} + \underbrace{8[\bar{X} - \bar{V}_i\bar{V}_i + (1/6)\bar{U}^3]}_{(2\text{PN})}, \quad (3.8a)$$

$$h_{0i}^{(N)} = \underbrace{-4\bar{V}_i}_{(1.5\text{PN})} - \underbrace{8\bar{R}_i}_{(2.5\text{PN})}, \quad (3.8b)$$

$$h_{ij}^{(N)} = \underbrace{2\delta_{ij}\bar{U}}_{(1\text{PN})} + \underbrace{(2\delta_{ij}\bar{U}^2 + 4\bar{W}_{ij})}_{(2\text{PN})}. \quad (3.8c)$$

在方程 (3.8) 中，我们引入了一组势函数 $\bar{\mathbf{X}} = \{\bar{U}, \bar{V}_i, \bar{X}, \bar{R}_i, \bar{W}_{ij}\}$ ，这些函数由物质场能动张量 (2.123) 确定。由于能动张量 (2.123) 包含了单极矩、自旋偶极矩和自旋四极矩三个部分的贡献，所以势函数 $\bar{\mathbf{X}}$ 也必然对应地包含着三个部分。例如 $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}^{(M)} + \bar{\mathbf{X}}^{(D)} + \bar{\mathbf{X}}^{(Q)}$ 。这些项的表达式在广义相对论下都已经被详细计算。单极矩部分 $\bar{\mathbf{X}}^{(M)}$ 可以在文献^[144]中找到，偶极矩部分 $\bar{\mathbf{X}}^{(D)}$ 可以在文献^[158]中找到，四极矩部分 $\bar{\mathbf{X}}^{(Q)}$ 可以在文献^[162-163]中找到。例如，Newton 势 \bar{U} 的单极、偶极和四极部分分别是

$$\bar{U}^{(M)} = \sum_A \frac{m_A}{r_A} + \{\text{高阶后牛顿修正}\}, \quad (3.9a)$$

$$\bar{U}^{(D)} = -2\varepsilon_{ijk} \sum_A v_A^i S_A^j \partial_k \left(\frac{1}{r_A} \right) = 2 \sum_A \left(\frac{m_A}{r_A} \right)^2 \frac{1}{m_A^2} (\mathbf{v}_A \times \mathbf{S}_A) \cdot \hat{\mathbf{n}}_A, \quad (3.9b)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(Q)} &= \sum_A \frac{1}{2m_A} (\delta_{ij} S_A^2 - S_A^i S_A^j) \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r_A} \right) \\ &= -\frac{3}{2} \sum_A \left(\frac{m_A}{r_A} \right)^3 \frac{1}{m_A^4} \left(S_A^i S_A^j - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_A^2 \right) \hat{\mathbf{n}}_A^i \hat{\mathbf{n}}_A^j, \end{aligned} \quad (3.9c)$$

$\bar{U}^{(M)}$ 的主导阶给出的正是 Newton 引力下双星系统产生的引力势。通过量纲分析不难发现 $\bar{U}^{(D)}/\bar{U}^{(M)} \sim \mathcal{O}(v^3)$ 和 $\bar{U}^{(Q)}/\bar{U}^{(M)} \sim \mathcal{O}(v^4)$ ，即分别处于 1.5PN 修正和 2PN 修正。这也对应了我们在第 3.1 节中的讨论。

下面转向对 dCS 修正的讨论。从能动张量 (2.123) 可以看到，dCS 引力只对黑洞的 Dixon 四极矩产生 $J_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow (1 + \delta C_Q) J_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的修正，意味着相应的势函数的修正必然只出现在自旋平方阶。也就对应 $\bar{\mathbf{X}}^{(Q)} \rightarrow (1 + \delta C_Q) \bar{\mathbf{X}}^{(Q)}$ 。而这些修正项是相对于对应主导阶的 2PN 修正，即势函数 $\bar{U}^{(Q)}, \bar{V}_i^{(Q)}, \bar{X}^{(Q)}, \bar{R}_i^{(Q)}, \bar{W}_{ij}^{(Q)}$ 及其 dCS 修正相对 $\bar{U}^{(M)}$ 主导阶的贡献分别处于 2PN、3.5PN、4.5PN、4PN 和 4PN。因此可以确定最低阶的修正正是对 Newton 势 \bar{U} 的修正，由能动张量 (2.123) 中 dCS 修正部分给出。

如方程 (2.123) 所示，dCS 修正下弯曲时空背景下自旋粒子的能动张量共包含五项。其中前三项依次来自粒子的单极矩、偶极矩和四极矩，后两项来自自旋偶极矩与背景标量场的相互作用、自旋四极矩与背景引力场的相互作用。我们仅需要考虑

$$\delta T_{00}^{(m)} = \frac{2}{3} \delta C_Q J^{i0j0} \partial_i \partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (3.10)$$

对方程 (3.10) 做积分得到

$$\begin{aligned} \delta U &\equiv \int \frac{\delta T_{00}^{(m)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' = \frac{2}{3} \delta C_Q J^{i0j0} \int \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}) \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 \mathbf{x}' \\ &= \frac{2}{3} \delta C_Q J^{i0j0} \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \right) \\ &= -\frac{3}{2m} \delta C_Q \left(S^i S^j - \frac{1}{3} \delta_{ij} S^k S^k \right) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^i (\mathbf{x} - \mathbf{z})^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^5}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

具体化到双黑洞系统，总的 Newton 势修正是两个黑洞各自修正的线性叠加^[92]

$$\delta U = -\frac{3}{2} \sum_A \delta C_Q \left(\frac{m_A}{r_A} \right)^3 \frac{1}{m_A^4} \left[(\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{S}_A)^2 - \frac{1}{3} (\mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_A) \right]. \quad (3.12)$$

于是 dCS 修正在后牛顿主导阶的近场度规解是

$$k_{00}^{(N)} = 2\delta U, \quad k_{0i}^{(N)} = k_{ij}^{(N)} = 0. \quad (3.13)$$

可以看到 δU 与 $\bar{U}^{(Q)}$ 有着相同的结构，是一个相对于 $\bar{U}^{(M)}$ 的 2PN 修正。由于广义相对论中的引力场满足非线性微分方程，因此不符合线性叠加原理。前面所提到的“双黑洞系统的 Newton 势为各自 Newton 势之和”仅在弱场极限成立，而不能推广为“双黑洞系统的引力场为各自引力场之和”。

目前还有修正常数 δC_Q 尚未确定。与确定 δC_g 相似，我们通过近场解与慢转动黑洞解的对比来确定这一常数。孤立黑洞的四极矩张量已经在方程 (2.60) 中给出 (Boyer-Lindquist 坐标)，我们将其拆分为 $Q_{ij} = \bar{Q}_{ij} + \delta Q_{ij}$ ，分别代表广义相对论部分和 dCS 修正，现在只需要将它转换到以垂直双星轨道平面方向为 z 轴的坐标系，即双星坐标系中。第 A 个黑洞的自旋角动量记做 $\mathbf{S}_A = |\mathbf{S}_A|(\sin \theta_A \sin \varphi_A, \sin \theta_A \cos \varphi_A, \cos \theta_A)$ ， θ_A 和 φ_A 为双星坐标系中空间一点相对第 A 个黑洞的极角和方位角。利用旋转矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_A & \sin \varphi_A & 0 \\ -\sin \varphi_A & \cos \varphi_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_A & \sin \theta_A \\ 0 & -\sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

黑洞 A 四极矩张量的 dCS 修正被转化为

$$\delta Q_{A,ij} = \frac{201}{3584} \zeta_A m_A^{-1} \left(S_A^i S_A^j - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_A^k S_A^k \right), \quad (3.15)$$

其中 ζ_A 是以第 A 个黑洞质量 m_A 进行归一化的耦合常数，

$$\zeta_A = 16\pi \frac{\alpha^2}{\beta m_A^4}. \quad (3.16)$$

于是，在双星坐标系中，双黑洞系统的 Newton 势修正是

$$\delta U = -3 \sum_A \delta Q_{A,ij} \frac{\hat{n}_A^i \hat{n}_A^j}{r_A^3}, \quad (3.17)$$

对比方程 (3.12) 和 (3.17)，可以确定 δC_Q 的取值为

$$\delta C_Q \rightarrow \delta C_{Q,A} = -\frac{201}{1792} \zeta_A. \quad (3.18)$$

与常数 δC_ϑ 不同的是， $\delta C_{Q,A}$ 对不同的质量的黑洞有着不同程度的修正。在后续的推导中，我们会进一步采用双星系统的总质量对耦合常数进行归一化。

本节所展示的内容，对应了后闵可夫斯基展开的第一次迭代^[91]，并在近场区域应用后牛顿展开，给出标量场和引力场在 dCS 引力下的主导阶修正。近场解决定了双黑洞之间的相互作用和双星的运动。

3.3 双黑洞系统的后牛顿动力学

本节从修改的 MPD 方程出发，将近场解 (3.5, 3.8, 3.13) 代入，从而导出双黑洞系统在后牛顿近似下的运动方程。

3.3.1 运动方程

首先将粒子的运动方程 (2.121) 写为

$$\mathbf{m} \frac{Du^\mu}{D\tau} = f^\mu, \quad (3.19)$$

其中

$$\begin{aligned} f^\mu = & -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma u^\lambda S^\delta R^{\alpha\beta\mu}{}_\lambda + \frac{1}{\mathbf{m}^2} \delta C_\vartheta S^\alpha (\nabla^\mu \nabla_\alpha \vartheta) \\ & - \frac{1}{6} (1 + \delta C_Q) J^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla^\mu R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

但是我们希望得到的运动方程应该具有 $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}$ 的形式。考虑到 $v^k = u^k/u^0$ 和 $d/dt = (d\tau/dt)(d/d\tau) = (u^0)^{-1}(d/d\tau)$ 并展开导数算符 $D/D\tau$ 得到

$$\frac{dv^k}{dt} = \gamma^k - v^k \gamma^0 + (\mathbf{m} u_0^2)^{-1} (f^k - v^k f^0). \quad (3.21)$$

其中定义了符号

$$\gamma^\mu \equiv \Gamma_{00}^\mu + 2v_k \Gamma_{0k}^\mu + v_j v_k \Gamma_{jk}^\mu \quad (3.22)$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ 是背景引力场的 Christoffel 联络。我们仅关心 dCS 修正的主导阶效应，因此可以取 $u_0 = -1$ 和联络除 $\Gamma_{00}^k = -\partial_k \delta U$ 外的各个分量为零，并得到

$$\frac{dv^k}{dt} = \bar{a}^k + \delta a^k. \quad (3.23)$$

其中

$$\delta a^k = \partial_k \bar{U}^{(M)} + \{\text{后牛顿修正}\}, \quad (3.24)$$

$$\delta a^k = \partial_k \delta U + \frac{1}{m^3} \delta C_{\vartheta} S_j [\partial_k \partial_j \vartheta^{(N)}] - \frac{1}{2m^2} \delta C_Q (S_i S_j - S^2 \delta_{ij}) (\partial_k \partial_i \partial_j \bar{U}), \quad (3.25)$$

分别代表广义相对论部分和 dCS 修正的主导阶。于是，我们得到了一个质量 m 和自旋 \mathbf{S} 的粒子在外场—— $\{\vartheta^{(N)}, \bar{U}, \delta U\}$ ——中运动的加速度。将方程 (3.25) 应用到二体系统中可以给出

$$\delta a_A^k = \partial_k \delta U_A + \frac{1}{m_A^3} \delta C_{\vartheta} S_{A,j} [\partial_k \partial_j \vartheta_A^{(N)}] - \frac{1}{2m_A^2} \delta C_{Q,A} (S_{A,i} S_{A,j} - S_A^2 \delta_{ij}) (\partial_k \partial_i \partial_j \bar{U}_A). \quad (3.26)$$

m_A 和 \mathbf{S}_A 是黑洞 A 的裸质量和裸自旋角动量， $\{\bar{U}_A, \delta U_A, \vartheta_A^{(N)}\}$ 代表了在黑洞 A 处势函数 $\{\vartheta^{(N)}, \bar{U}, \delta U\}$ 的取值，它们分别由方程 (3.9a, 3.12, 3.5) 取 $\mathbf{x} = \mathbf{z}_A$ 时给出，并由所有黑洞贡献的线性叠加构成。

然而，这些场在黑洞 A 处都是发散的。例如在 Newton 阶有 $\bar{U} = m_1/r_1 + m_2/r_2 = m_1/|\mathbf{x} - \mathbf{z}_1| + m_2/|\mathbf{x} - \mathbf{z}_2|$ ，那么 $\bar{U}_1 = m_1/|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_1| + m_2/|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2| \rightarrow \infty$ 。这是由于我们一直采用质点近似、无法正确地描述黑洞的力场对自身的作用力所导致的。但是这种发散不是物理的，可以通过一定的正规化手段加以消除。这一技术称为 Hadamard 正规化 (regularization)^[175]。考虑如下一类函数 F ，它们依赖于场点 \mathbf{x} 和两个源点 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ 。当场点 \mathbf{x} 靠近源点之一，例如靠近 \mathbf{z}_1 ，即 $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{z}_1| \rightarrow 0$ 时，函数 F 可以展开为

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{-k_0 \leq k \leq 0} r_1^k f_k(\mathbf{x}; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2). \quad (3.27)$$

我们定义函数 F 在位置 1 处的值 F_1 为它的 Hadamard 有限部分，即环绕源点 \mathbf{z}_1 各方向对展开式 (3.27) 零次幂系数的平均，并将场点取到源点 1 处。记做

$$F_1 \equiv \frac{1}{4\pi} \int f_0(\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) d\Omega_1, \quad (3.28)$$

其中 $d\Omega_1$ 为源点 \mathbf{z}_1 处的立体角元。根据以上正规化步骤，可以计算得到势函数 $\mathcal{V}^{(N)}$ 在 \mathbf{z}_1 附近的展开分别是

$$\bar{U} = \sum_{-1 \leq k \leq 0} r_1^k \bar{u}_k(\mathbf{x}; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad \bar{u}_{-1} = m_1, \quad \bar{u}_0 = \frac{m_2}{r_2}, \quad (3.29a)$$

$$\vartheta = \sum_{-2 \leq k \leq 0} r_1^k t_k(\mathbf{x}; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \quad t_0 = -\frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r_2^2}, \quad (3.29b)$$

$$\delta U = \sum_{-3 \leq k \leq 0} r_1^k \delta u_k(\mathbf{x}; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \quad \delta u_0 = \frac{603}{3584} \frac{\zeta_2}{m_2^4} \left(\frac{m_2}{r_2} \right)^3 \left[(\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{S}_2)^2 - \frac{1}{3} (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_2) \right]. \quad (3.29c)$$

因此，它们在源点 \mathbf{z}_1 处的取值分别为

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{4\pi} \int \bar{u}_0(\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) d\Omega_1 = \frac{m_1}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|} = \frac{m_1}{r}, \quad (3.30a)$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{4\pi} \int t(\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) d\Omega_1 = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|^2} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r^2}, \quad (3.30b)$$

$$\delta U_1 = \frac{1}{4\pi} \int \delta u_0(\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) d\Omega_1 = \frac{603}{3584} \frac{\zeta_2}{m_2^4} \left(\frac{m_2}{r} \right)^3 \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2)^2 - \frac{1}{3} (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_2) \right], \quad (3.30c)$$

其中 $r \equiv |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|$ 为两个黑洞之间的距离。无一例外，这些势函数在 \mathbf{z}_1 处取值的有限部分完全是由黑洞 2 贡献的。这就是说，本文所讨论的双黑洞系统的运动可以忽略黑洞引力场对自身的作用。将方程 (3.30) 代入 (3.26)，从而得到黑洞 1 的运动 $d\mathbf{v}_1/dt$ 。只需要将所有指代黑洞的指标做代换 $1 \leftrightarrow 2$ ，就可以得到黑洞 2 在黑洞 1 的引力下的运动方程。定义相对速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ 和相对运动加速度 $\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 得到^[92]，

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \delta \mathbf{a}. \quad (3.31)$$

其中

$$\mathbf{a}_N = -\frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a} = & \zeta \left(-\frac{m}{r^2} \right) \left(\frac{m}{r} \right)^2 \left\{ -\frac{603}{3584} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \frac{1}{m_A^4} \left[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_A) \mathbf{S}_A - 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_A)^2 \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{S}_A^2 \hat{\mathbf{n}} \right] \right. \\ & \left. + \frac{75}{256} \frac{1}{v} \frac{1}{m_1^2} \frac{1}{m_2^2} \left[(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1) \mathbf{S}_2 + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2) \mathbf{S}_1 - 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2) \hat{\mathbf{n}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

分别代表了广义相对论中 Newton 阶的贡献和 dCS 修正。其中双黑洞总质量为 $m \equiv m_1 + m_2$ ，无量纲耦合常数是

$$\zeta \equiv 16\pi \frac{\alpha^2}{\beta m^4}. \quad (3.34)$$

上述计算确切地表明 dCS 引力对双黑洞系统的运动产生 2PN 修正，且修正项 (3.33) 中包含两部分：

- 其一正比于 $|\mathbf{S}_1||\mathbf{S}_2|$ ，起源于两个黑洞标量场之间的相互作用，以自旋-自旋耦合的形式影响双黑洞系统演化。

- 其二正比于 \mathbf{S}_1^2 或 \mathbf{S}_2^2 ，起源于 dCS 对黑洞四极矩的修正与外场的耦合，以单极-四极耦合的形式影响双黑洞系统演化。

这些额外的耦合都将为双黑洞系统的引力辐射带来相应的修正。

3.3.2 自旋进动

结合协变自旋矢量定义 (2.95)，进动方程 (2.122) 可以改写为

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \left[\frac{1}{\mathbf{m}^3} \delta C_{\vartheta} p_\gamma S_\alpha (\nabla_\beta \vartheta) - \frac{2}{3\mathbf{m}} (1 + \delta C_Q) p_\gamma J^{\rho\lambda\sigma}{}_\alpha R_{\beta\sigma\rho\lambda} \right], \quad (3.35)$$

精确到四极近似和 dCS 修正的主导阶，三维自旋矢量满足如下形式的演化方程

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} + \delta\boldsymbol{\Omega}, \quad (3.36)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 是 Larmor 频率，包括广义相对论部分 $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ 和 dCS 修正 $\delta\boldsymbol{\Omega}$ 。后者由

$$\delta\Omega^k = -\frac{1}{m^2} \epsilon^{ijk} \delta C_{\vartheta} [\partial_i \vartheta^{(N)}] S_j + \frac{1}{m} \delta C_Q \epsilon^{ijk} S_q (\partial_q \partial_i \bar{U}) S_j \quad (3.37)$$

给出，其中 ϵ^{ijk} 是三维的 Levi-Civita 张量。这就给出了一个自旋角动量为 \mathbf{S} 的粒子在外场 $\{\vartheta^{(N)}, \bar{U}\}$ 中进动方程。下面我们将这一方程应用到双黑洞系统。例如黑洞 1 的进动方程可以写为

$$\frac{d\mathbf{S}_1}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{12} \times \mathbf{S}_1, \quad \boldsymbol{\Omega}_{12} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{12} + \delta\boldsymbol{\Omega}_{12}, \quad (3.38)$$

对广义相对论部分只考虑主导阶，即自旋-轨道耦合贡献的部分

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{12} = \frac{1}{r^3} \left(2 + \frac{3m_2}{2m_1} \right) \mathbf{L}, \quad (3.39)$$

\mathbf{L} 是系统的轨道角动量矢量。dCS 修正部分写为

$$\delta\Omega_{12}^k = -\frac{1}{m_1^2} \epsilon^{ijk} \delta C_{\vartheta} [\partial_i \vartheta_1^{(N)}] S_{1,j} + \frac{1}{m_1} \delta C_{Q,1} \epsilon^{ijk} S_{1,m} (\partial_m \partial_i \bar{U}_1) S_{1,j} \quad (3.40)$$

其中 $\{\bar{U}_A, \vartheta_A^{(N)}\}$ 是 Newton 势和标量场在位置 \mathbf{z}_A 处的取值，其发散性可以通过 Hadamard 正规化消除。等价地，当我们考虑黑洞 1 的进动时，外力矩仅由黑洞 2 贡献，做相应处理后不难得到^[106,134]

$$\delta\boldsymbol{\Omega}_{12} = \frac{\zeta}{r^3} \left\{ -\frac{25}{256} \frac{1}{v^2} [\mathbf{S}_2 - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2)\hat{\mathbf{n}}] - \frac{603}{1792} \frac{m^4 m_2}{m_1^4 m_1} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)\hat{\mathbf{n}} \right\}. \quad (3.41)$$

其中对称质量比是

$$v \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3.42)$$

黑洞 2 的进动方程只需对方程 (3.38, 3.39, 3.41) 做代换 $1 \leftrightarrow 2$ 得到。

进动方程可以给出的一个重要结论是自旋角动量的大小在进动中保持不变，例如对 \mathbf{S}_1 有

$$\dot{\mathbf{S}}_1 \propto \mathbf{S}_1 \cdot \dot{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{S}_1 \cdot (\boldsymbol{\Omega}_{12} \times \mathbf{S}_1) = \boldsymbol{\Omega}_{12} \cdot (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1) = 0. \quad (3.43)$$

将 1, 2 对换即可得到 \mathbf{S}_2 的守恒。自旋大小的守恒为后续进动双黑洞系统的求解提供了重要的守恒量^[166]。

3.3.3 双黑洞系统的机械能和轨道角动量

方程 (3.31, 3.38) 给出了双黑洞系统的一组封闭的运动方程，只要给定初始条件即可完全求出双黑洞系统的动力学。在 Newton 引力中，机械能守恒和角动量守恒决定了两体运动的轨道总可以约化为圆锥曲线，并局限在一个轨道平面内。尤其是当圆锥曲线偏心率小于 1 时，轨道为封闭的椭圆并形成周期运动。当考虑广义相对论和 dCS 带来的修正时，Newton 引力的平方反比定律被打破，引力的方向不再沿着两个天体之间的连线，同时，进动还会导致天体运动不再局限在一个平面内。在这些复杂因素的影响下，双星系统机械能和角动量的定义不再明确。

但是如果我们仅关注后牛顿近似适用的情形，系统引力仅为对 Newton 引力的微弱偏离。那么可以预见，体系仍然允许守恒能量和角动量的存在，且相对 Newton 引力情形仅存在微弱的偏离。这就为我们寻找双黑洞系统的守恒量提供了思路——猜测法 (guess-work)^[91,158]。将双黑洞系统的守恒能量写作

$$E = \mu \epsilon, \quad \epsilon = \epsilon_N + \delta \epsilon. \quad (3.44)$$

其中 Newton 阶的能量是

$$\epsilon_N = \frac{1}{2} v^2 - \frac{m}{r} \quad (3.45)$$

主导阶的 dCS 修正属于 2PN 和自旋平方阶，因此机械能中要包含 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 两个矢量，且只能以因子

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2), \quad S_1^2, \quad S_2^2, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)^2, \quad (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2)^2. \quad (3.46)$$

的形式存在。设修正的能量为这些标量的线性叠加，叠加后对时间求导并令其得零，可以将叠加系数解出，从而得到 dCS 修正的能量为^[92]

$$\begin{aligned} \delta \epsilon = \zeta \left(\frac{m}{r} \right)^3 \left\{ -\frac{25}{256} \frac{1}{v} \frac{1}{m_1^2} \frac{1}{m_2^2} [(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2)] \right. \\ \left. + \frac{201}{3584} \frac{m^2}{m_1^2} \frac{1}{m_1^4} [S_1^2 - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_1)^2] + \frac{201}{3584} \frac{m^2}{m_2^2} \frac{1}{m_2^4} [S_2^2 - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_2)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

与运动方程的修正相似，修正能量也包含了自旋-自旋耦合和单极-四极耦合两个部分。

在考虑双黑洞自旋后，体系的轨道角动量不再在一般情况下守恒。取而代之的是总角动量

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (3.48)$$

的守恒。借助方程 (3.25, 3.38) 不难证明，当轨道角动量在精确到 2PN 阶次仍然写为

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \equiv r(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \quad (3.49)$$

时，总角动量 \mathbf{J} 是守恒的。因此，自旋平方项在 2PN 阶次上对轨道角动量没有修正^[91,157,162]。

3.4 标量辐射

本节和下一节开始关注远场的引力场，也就是标量辐射和引力辐射的情况。这对应了后闵可夫斯基展开第一次和第二次迭代在远场的积分^[91,143]。在第一次迭代过程中，远场辐射仅依赖于物质场。但是在第二次迭代的积分中，不仅依赖于标量近场解和引力近场解，甚至还依赖于标量和引力场在第一次迭代中得到的远场解。前者构成了等时辐射，后者构成了引力波的尾 (tails)^[176-178]。在本文中，我们仅考虑等时辐射。

首先关注标量辐射。将近场解 (3.5, 3.8) 代入标量场方程 (2.128) 右侧的非紧致部分，得到^[93]

$$16\pi\sigma = \underbrace{-2U [\partial_i \partial_i \vartheta^{(N)}]}_{16\pi\sigma_1} + \underbrace{\frac{8\alpha}{\beta} \epsilon^{ijk} (\partial_i \partial_m U) (\partial_j \partial_m V_k)}_{16\pi\sigma_2}. \quad (3.50)$$

紧致部分则由方程 (3.1) 给出。在远场区域，标量场方程的解可以为多极公式

$$\vartheta^{(F)} = \frac{1}{R} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p \int (4\sigma + \rho_\vartheta)(t_r, \mathbf{x}') (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}')^p d^3 \mathbf{x}' \quad (3.51)$$

其中 $t_r \equiv t - R$ 是推迟时间， $\hat{\mathbf{N}}$ 是观测者相对于波源参考系的方位矢量。我们考虑标量辐射多极展开的前几阶，并依次考察各个源项对标量辐射的贡献量级。例如，由源 σ_1 贡献的部分的单极、偶极和四极辐射分别估计为^[92]

$$\vartheta_{\text{mon}}^{(\sigma_1)} = -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} \int U [\partial_i \partial_i \vartheta^{(N)}] d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m |\boldsymbol{\mu}|}{R r^2} \sim \mathcal{O}(1/c^6), \quad (3.52a)$$

$$\vartheta_{\text{dip}}^{(\sigma_1)} = -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int U [\partial_i \partial_i \vartheta^{(N)}] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m |\boldsymbol{\mu}|}{R r^2} v \sim \mathcal{O}(1/c^7), \quad (3.52b)$$

$$\vartheta_{\text{quad}}^{(\sigma_1)} = -\frac{1}{R} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int U [\partial_i \partial_l \vartheta^{(N)}] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} v^2 \sim \mathcal{O}(1/c^8), \quad (3.52c)$$

其中各式最后的 c 为真空光速，我们用它表示标量辐射的量级。更高极矩辐射的贡献进入更高后牛顿阶次，例如 $\vartheta_{\text{oct}}^{(\sigma_1)} \sim \mathcal{O}(1/c^9)$ 。类似地，我们继续考察其他各源项的贡献。对 σ_2 有

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{mon}}^{(\sigma_2)} &= \frac{2}{R} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\beta} \int \epsilon^{ijk} (\partial_i \partial_m U) (\partial_j \partial_m V_k) d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{2}{R} \frac{1}{\pi} \epsilon^{ijk} \frac{\alpha}{\beta} \oint \hat{N}^i [(\partial_m U) (\partial_j \partial_m V_k)] R^2 d\Omega \propto \frac{1}{R^3} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.53a)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{dip}}^{(\sigma_2)} &= \frac{2}{R} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\beta} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \int (\partial_i \partial_m U) (\partial_j \partial_m V_k) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{2}{R} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\beta} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \oint \hat{N}_j [(\partial_i \partial_m U) (\partial_m V_k) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})] R^2 d\Omega \right\} \propto \frac{1}{R^2} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.53b)$$

$$\vartheta_{\text{quad}}^{(\sigma_2)} = \frac{1}{R} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\beta} \epsilon^{ijk} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int (\partial_i \partial_m U) (\partial_j \partial_m V_k) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \left(\frac{mV}{r} \right)^3 \sim \mathcal{O}(1/c^{11}). \quad (3.53c)$$

由于势函数 U 和 V_k 按距离的倒数 $1/R$ 衰减，因此它们所贡献的单极和偶极项不能看做辐射场，四极辐射项则处于相对 $\mathcal{O}(1/c^6)$ 的高阶修正。

对于源项中的紧致部分 (3.1)，我们有

$$\vartheta_{\text{mon}}^{(\rho_1)} = -\frac{1}{R} \sum_A \mu_A^i \int \partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A) d^3 \mathbf{x} = 0, \quad (3.54a)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{dip}}^{(\rho_1)} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \sum_A \mu_A^i \int [\partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A)] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \sum_A (\hat{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\mu}_A) \sim \mathcal{O}(1/c^7), \end{aligned} \quad (3.54b)$$

$$\vartheta_{\text{quad}}^{(\rho_1)} = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_A \mu_A^i \int [\partial_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A)] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} \sim \mathcal{O}(1/c^6). \quad (3.54c)$$

在估计 $\vartheta_{\text{dip}}^{(\rho_1)}$ 的量级时涉及到 $\dot{\boldsymbol{\mu}}_A$ 。利用进动方程 (3.38) 可知 $\dot{\boldsymbol{\mu}}_A \sim \mathcal{O}(1/c^5)$ 。此外对 ρ_2 和 ρ_3 两项的分析还可以给出

$$\vartheta_{\text{mon}}^{(\rho_2)} = -\frac{1}{R} \sum_A \mu_A^i \dot{v}_A^i \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A) d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} \sim \mathcal{O}(1/c^6), \quad (3.55a)$$

$$\vartheta_{\text{dip}}^{(\rho_2)} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \sum_A \mu_A^i \dot{v}_A^i \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{z}) d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} v \sim \mathcal{O}(1/c^7), \quad (3.55b)$$

$$\vartheta_{\text{quad}}^{(\rho_2)} = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_A \mu_A^i \dot{v}_A^i \int \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} v^2 \sim \mathcal{O}(1/c^8). \quad (3.55c)$$

和

$$\vartheta_{\text{mon}}^{(\rho_3)} = \frac{1}{R} \sum_A \mu_A^i v_A^i v_A^j \int \partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A) d^3 \mathbf{x} = 0, \quad (3.56a)$$

$$\vartheta_{\text{dip}}^{(\rho_3)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \sum_A \mu_A^i v_A^i v_A^j \int [\partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A)] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} v \sim \mathcal{O}(1/c^7), \quad (3.56b)$$

$$\vartheta_{\text{quad}}^{(\rho_3)} = \frac{1}{R} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_A \mu_A^i v_A^i v_A^j \int [\partial_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_A)] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} \propto \frac{m}{R} \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{r^2} v^2 \sim \mathcal{O}(1/c^8). \quad (3.56c)$$

将上述估计结果整理为表格(3.1)。可以清晰地看到,主导阶的标量辐射仅由 $\vartheta_{\text{mon}}^{(\sigma_1)}$ 、 $\vartheta_{\text{quad}}^{(\rho_1)}$ 和 $\vartheta_{\text{mon}}^{(\rho_2)}$ 贡献。下面我们详细计算这三项。

表 3.1 标量辐射场关于真空光速的展开阶次。

	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3
单极辐射	$1/c^6$	0	0	$1/c^6$	0
偶极辐射	$1/c^7$	0	0	$1/c^7$	$1/c^7$
四极辐射	0	$1/c^9$	$1/c^6$	$1/c^8$	$1/c^8$

在计算非紧致项 σ_1 对辐射场的贡献时,我们会再次遇到势函数在源点处发散的问题。由于 $\sigma_1 \sim \vartheta \bar{U}$,而 \bar{U} 和 ϑ 都要写为两个黑洞各自贡献之和,那么它们的乘积就是 $\sigma_1 \sim \vartheta_1 \bar{U}_1 + \vartheta_2 \bar{U}_2 + \vartheta_2 \bar{U}_1 + \vartheta_1 \bar{U}_2$ 。不妨称前两项为自相互作用部分,后两项为交叉相互作用部分。其中自相互作用部分的体积分中只包含了一个奇点,这样的积分是真正奇异的,无法用Hadamard正规化进行处理。自相互作用项代表了一个质点的运动本身对辐射的贡献,这在物理意义上与紧致部分的贡献完全相同,并完全由紧致部分所替代,因此在接下来的计算中,所有的自相互作用部分都将被略去不计。交叉相互作用部分包含了两个奇点,可以利用Hadamard正规化的积分公式^[175]

$$\int \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} d^3 \mathbf{x} = -2\pi r \quad (3.57)$$

进行计算。于是源项 σ_1 贡献的单极辐射是

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{mon}}^{(\sigma_1)} &= -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} \int U [\partial_i \partial_i \vartheta^{(N)}] d^3 \mathbf{x}' \\ &= -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} \int U_1 [\partial_i \partial_i \vartheta_2^{(N)}] d^3 \mathbf{x}' + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{m_1}{r_1} \right) \partial_i \partial_i \left(\mu_2^j \frac{\hat{n}_2^j}{r_2^2} \right) d^3 \mathbf{x} + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= -\frac{1}{R} \frac{1}{2\pi} m_1 \mu_2^j \partial_{ij}^{(2)} \left\{ \int \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} d^3 \mathbf{x} \right\} + (1 \leftrightarrow 2) = \frac{m_1}{R} \mu_2^j \partial_{ij}^{(2)} r + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= -\frac{2}{R} \frac{m}{r^2} \left[\frac{m_2}{m} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_1) - \frac{m_1}{m} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

其中 $\partial_i^{(2)}$ 表示对 \mathbf{z}_2 的求导。类似地,紧致部分 ρ_1 和 ρ_2 的贡献分别是

$$\vartheta_{\text{mon}}^{(\rho_2)} = \frac{1}{R} \frac{m}{r^2} \left[\frac{m_2}{m} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_1) - \frac{m_1}{m} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2) \right], \quad (3.59)$$

和

$$g_{\text{quad}}^{(\rho_1)} = \frac{1}{R} \sum_A (\hat{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\mu}_A) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_A) = \frac{1}{R} \frac{m}{r^2} \left[\frac{m_1}{m} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\mu}_2) - \frac{m_2}{m} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\mu}_1) \right] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}). \quad (3.60)$$

综合方程 (3.58, 3.59, 3.60)，精确到后牛顿主导阶的标量辐射场一般表达式是^[92,125]

$$\vartheta = \frac{5}{8} \frac{\mu}{R} \left(\frac{m}{r} \right)^2 \frac{\alpha}{\beta m^2 v} [(\hat{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Delta}})(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Delta}})]. \quad (3.61)$$

其中 μ 为系统的约化质量，

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m}, \quad (3.62)$$

$\tilde{\boldsymbol{\Delta}}$ 是描述自旋矢量之差的符号，

$$\tilde{\boldsymbol{\Delta}} \equiv \frac{m_2}{m} \frac{\mathcal{S}_1}{m_1^2} - \frac{m_1}{m} \frac{\mathcal{S}_2}{m_2^2}. \quad (3.63)$$

标量辐射场中包含两项，一项正比于 $\hat{N}^i \hat{N}^j$ ，代表了四极辐射的贡献，存在相应的角分布。而另一项不依赖于矢量 $\hat{\mathbf{N}}$ ，是单极辐射的贡献，是各向同性的辐射场。这类辐射的一个重要特征是携带能量但不携带角动量。

3.5 引力辐射

本节关注 dCS 引力下双黑洞系统的引力辐射。等时部分的引力波可以写为

$$\bar{H}_{ij} = \bar{h}_{ij} + \bar{k}_{ij} = \frac{2\mu}{R} \left[\xi_{(0)}^{ij} + \delta \xi^{ij} \right], \quad (3.64)$$

其中

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2\mu}{R} \xi_{ij}^{(0)}, \quad \xi_{ij}^{(0)} = 2 [v_i v_j - \gamma \hat{n}_i \hat{n}_j]. \quad (3.65)$$

代表了广义相对论中 Newton 阶的引力波形，剩余部分代表 dCS 修正部分，应当从方程 (2.82) 的多极展开出发，给出

$$\bar{k}_{\mu\nu} = \frac{4}{R} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p \int K_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}') (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x}')^p d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.66)$$

如前所述，广义相对论下的高阶后牛顿修正均已省略。

众所周知，Newton 阶的引力辐射是质量四极辐射。但是这里我们需要着重申明：这一结论仅仅适用于 Newton 阶近似，高阶修正的计算存在显著的差别。考虑多极展开 (3.66) 的第零阶，应用能动张量守恒 $\partial^\mu K_{\mu\nu} = 0$ —— $\partial_0 K^{00} + \partial_i K^{0i} = 0, \partial_0 K^{0j} + \partial_i K^{ij} = 0$ 可以得到

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ij} &= \frac{4}{R} \int K^{ij} d^3 \mathbf{x}' = \frac{2}{R} \left[2 \int \partial_k (x'^i K^{kj}) d^3 \mathbf{x}' \right. \\ &\quad \left. + \partial_0 \int \partial_k (x'^i x'^j K^{0k}) d^3 \mathbf{x}' + \partial_0 \partial_0 \int x'^i x'^j K^{00} d^3 \mathbf{x}' \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

其中方括号中的前两项被积函数为全导数，那么是否可以将其转化为面积分并积分为零呢？如果仅考虑紧致部分，积分

$$\int \partial_k \left[x'^i K_{(\text{compact-support})}^{jk} \right] d^3 \mathbf{x}' = \oint \left[x'^i K_{(\text{compact-support})}^{jk} \right] dS_k = 0, \quad (3.68)$$

因为在无穷远的球面上 $K_{(\text{compact-support})}^{jk} = 0$ 。这样我们就从方程 (3.67) 得到了质量四极辐射公式——引力波正比于物质场质量四极矩的二阶时间导数^[30]。但事实上， K^{jk} 却包含了很多非紧致项，从方程 (2.83) 得到

$$K_{ij} = kT_{ij}^{(m)} + (1+h)\delta T_{ij}^{(m)} + T_{ij}^{(g)} + (16\pi)^{-1}\tilde{\Lambda}_{ij} - 2\alpha\tilde{C}_{ij}, \quad (3.69)$$

其中只有前两项属于紧致部分，后面三项均属于非紧致部分。紧致部分代表了物质场的有限分布，对应的 (3.67) 中的无穷大球面积分是零。而根据后闵可夫斯基展开中的迭代方案，这一处理属于第二次迭代^[91]。方程 (3.69) 中涉及到的场应取为第一次迭代的结果，它们按照距离的倒数 $1/R$ 衰减，空间一阶导数按照 $1/R^2$ 衰减。于是可以得到 K^{ij} 按照 $1/R^4$ 衰减。因此球面积分

$$\int \partial_k (x'^i K^{kj}) d^3 \mathbf{x}' = \oint \hat{n}^k (x'^i K^{kj}) R^2 d\Omega \sim R \frac{1}{R^4} R^2 = \frac{1}{R} \rightarrow 0, \quad (3.70a)$$

$$\int \partial_k (x'^i x'^j K^{0k}) d^3 \mathbf{x}' = \oint \hat{n}^k (x'^i x'^j K^{0k}) R^2 d\Omega \sim RR \frac{1}{R^4} R^2 \rightarrow \text{有限值}. \quad (3.70b)$$

从而导致

$$\frac{4}{R} \int K^{ij} d^3 \mathbf{x}' \neq \frac{2}{R} \partial_0 \partial_0 \int x'^i x'^j K^{00} d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.71)$$

综上所述。在计算 dCS 张量辐射时不能采用 K_{00} 的四极辐射公式直接计算。替代地，只能采用 K_{ij} 的单极辐射公式进行计算，或者详细地计算方程 (3.67) 涉及的球面积分。在本文中，我们采用前一种方案，dCS 引力辐射场由

$$\bar{k}_{ij} = \frac{4}{R} \int K_{ij} d^3 \mathbf{x} \quad (3.72)$$

给出。首先因为

$$\mathcal{O} \left[T_{ij}^{(m)} \right] \sim \mathcal{O}(v^2), \quad \mathcal{O}(k_{ij}) \sim \mathcal{O}(\hat{\chi}^2), \quad \mathcal{O} \left[\delta T_{ij}^{(m)} \right] \sim \mathcal{O}(v^2 \hat{\chi}^2) \quad (3.73)$$

张量 K^{ij} (3.69) 的前两项属于 $\mathcal{O}(v^2 \hat{\chi}^2)$ 阶次，其中 v 和 $\hat{\chi}$ 仍然表示是天体特征速度 and 无量纲自旋。类比引力近场解及其修正 (3.12) 可以看到 2PN 修正仅包含 $\hat{\chi}^2$ 因子而没有速度因子，因此方程 (3.69) 前两项对引力辐射的贡献必然高于 2PN 阶次。张量 K^{ij} (3.69) 的后三项分别是

$$T_{ij}^{(g)} = \beta \left[(\partial_i \vartheta)(\partial_j \vartheta) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\partial_k \vartheta)(\partial_k \vartheta) \right], \quad (3.74)$$

$$(16\pi)^{-1} \tilde{\Lambda}_{ij} = (4\pi)^{-1} \left[-\delta_{ij} (\partial_k \bar{U})(\partial_k \delta U) + (\partial_i \bar{U})(\partial_j \delta U) + (\partial_i \delta U)(\partial_j \bar{U}) \right], \quad (3.75)$$

和

$$-2\alpha\tilde{C}_{ij} = -4\alpha\epsilon_{r(i|m}\partial_m [\square_{\eta}^2\bar{V}_{j)}] (\partial_r\vartheta) + 8\alpha\epsilon_{r(j|m}(\partial_m\partial_{[i}\bar{V}_{k]}) (\partial_k\partial_r\vartheta), \quad (3.76)$$

方程 (3.74) 来自标量场能动张量，它将产生引力辐射中自旋-自旋耦合部分，代表双星标量场之间相互作用能的辐射。方程 (3.75) 将产生引力辐射中单极-四极耦合部分。方程 (3.76) 包含了引力辐射与标量辐射之间的耦合，将导致宇称破缺效应的出现。但之后我们方程 (3.76) 证明它对引力辐射的贡献为零。这表明在不考虑宇宙膨胀的情况下，双黑洞系统的引力辐射在极化模式上不会呈现出振幅双折射现象。

与标量场遇到的情形相似，非紧致部分包含了近场解的乘积，需要拆分为自相互作用部分和交叉相互作用部分。自相互作用部分因包含一个奇点而无法被 Hadamard 正规化所处理，而包含两个奇点的部分则由 (3.57) 计算。只考虑交叉相互作用部分，方程 (3.74) 对应的推迟积分是

$$\begin{aligned} \frac{4}{R} \int T_{ij}^{(\vartheta)} d^3\mathbf{x} &= \frac{4\beta}{R} \int \left\{ \left[\partial_i\vartheta_1^{(N)} \right] \left[\partial_j\vartheta_2^{(N)} \right] - \frac{1}{2}\delta_{ij} \left[\partial_k\vartheta_1^{(N)} \right] \left[\partial_k\vartheta_2^{(N)} \right] \right\} d^3\mathbf{x} + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{4\beta}{R} \mu_1^k \mu_2^l \left[\partial_{ik}^{(1)}\partial_{jl}^{(2)} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{qk}^{(1)}\partial_{ql}^{(2)} \right] \int \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} d^3\mathbf{x} + (1 \leftrightarrow 2) \\ &= -\frac{8\pi\beta}{R} \mu_1^k \mu_2^l \left[\partial_{ik}^{(1)}\partial_{jl}^{(2)} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{qk}^{(1)}\partial_{ql}^{(2)} \right] r + (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (3.77)$$

类似地可以由 (3.75) 计算得到

$$\frac{4}{R} \int (16\pi)^{-1} \tilde{A}_{ij} d^3\mathbf{x} = -\frac{2}{R} \delta C_Q \frac{m_1}{m_2} S_2^k S_2^l \left[\partial_{ik}^{(1)}\partial_{jl}^{(2)} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_{qk}^{(1)}\partial_{ql}^{(2)} \right] r + (1 \leftrightarrow 2). \quad (3.78)$$

算符 $\partial_k^{(1)}$ 和 $\partial_k^{(2)}$ 分别代表对天体坐标 \mathbf{z}_1 和 \mathbf{z}_2 的导数。方程 (3.76) 贡献的引力辐射场是

$$\frac{4}{R} \int (-2\alpha\tilde{C}_{ij}) d^3\mathbf{x} = \frac{8\alpha}{R} \int [\epsilon_{rjm}(\partial_r\partial_k\partial_m\partial_i\bar{V}_k) + \epsilon_{rim}(\partial_r\partial_k\partial_m\partial_j\bar{V}_k)] \vartheta^{(N)} d^3\mathbf{x} = 0. \quad (3.79)$$

结合方程 (3.77, 3.78) 并计算其中的导数，我们得到张量场的辐射波形为

$$\bar{k}^{ij} = \frac{2\mu}{R} \delta\xi^{ij}, \quad \delta\xi^{ij} = \delta\xi_{(SS)}^{ij} + \delta\xi_{(MQ)}^{ij}, \quad (3.80)$$

其中^[92-93,125]

$$\begin{aligned} \delta\xi_{(SS)}^{ij} &= \frac{75}{128} \frac{\zeta}{v} \left(\frac{m}{r} \right)^3 \frac{1}{m_1^2 m_2^2} \left\{ \hat{n}^i \hat{n}^j [5(\hat{n} \cdot \mathbf{S}_1)(\hat{n} \cdot \mathbf{S}_2) - (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)] \right. \\ &\quad \left. - [(\hat{n} \cdot \mathbf{S}_1)(\hat{n}^i S_2^j + \hat{n}^j S_2^i) + (\hat{n} \cdot \mathbf{S}_2)(\hat{n}^i S_1^j + \hat{n}^j S_1^i)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\delta\xi_{(MQ)}^{ij} = -\frac{603}{1792} \zeta \left(\frac{m}{r} \right)^3 \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \frac{1}{m_A^4} \left\{ \hat{n}^i \hat{n}^j [(\hat{n} \cdot \mathbf{S}_A)^2 - \mathbf{S}_A^2] - (\hat{n} \cdot \mathbf{S}_A)(\hat{n}^i S_A^j + \hat{n}^j S_A^i) \right\}. \quad (3.82)$$

这样就给出了 2PN 近似下 dCS 对引力辐射场修正的一般表达式。只需要代入运动方程和进动方程的解，即可得到具体的引力波形。引力辐射仍然包含自旋-自旋耦合和单极-四极耦合两个部分，分别来自与黑洞标量场之间的耦合和自旋四极矩与单极矩之间的耦合。

3.6 本章小结

本章是全文承上启下的部分。基于第2章中提供的理论工具，在后牛顿框架下导出 dCS 引力下双黑洞系统的运动方程和引力辐射场的一般表达式。首先在近场区域，以中给出的线性化引力场方程为基础，基于后牛顿展开，求解了双黑洞附近的标量场和引力场 (3.6, 3.13)，通过与孤立黑洞解的匹配，确定了有效场论中残余的待定系数。这些场负责传递双黑洞之间的相互作用力，进而支配它们的运动，也为远场区域的引力辐射提供波源。此后将近场解代入 MPD 方程，在后牛顿框架下约化得到运动方程 (3.31, 3.38)，其中 dCS 引力对平动部分的修正在 2PN 阶次，对自旋进动部分的修正在 0.5PN 阶次。基于运动方程，我们通过猜测法得到了 dCS 修正下的守恒能量 (3.44) 和轨道角动量 (3.49)。在考虑双星自旋的情况下轨道角动量不再一般性地守恒，取而代之的是总角动量的守恒。最后通过在远场区域对扰动方程的多极展开和推迟积分，得到了标量辐射和引力辐射的一般表达式 (3.61, 3.80)。但是写出运动方程不代表完成了对引力波源的建模，写出引力辐射的一般表达式也不代表就给出了可探测的引力波信号。具体的求解和计算会在后续的两章中相继给出。

第 4 章 dCS 引力下的双黑洞系统：自旋平行情形

本章我们首先关注一类特殊情况——双黑洞的自旋角动量矢量与轨道角动量平行或反平行。此时，自旋进动效应消失，自旋角动量和轨道角动量分别守恒，双黑洞被局限在一个轨道平面内运动。在第 4.1 节中，我们针对这一自旋平行系统求解运动方程 (3.23)，给出它的准开普勒参数化 (quasi-Keplerian parameterization) 解。在第 4.2 节中，我们考虑准圆轨道近似下的引力波形，并讨论 dCS 理论中引力辐射的极化模式。在此后的几节中，我们将依次给出自旋平行系统的引力波形 (第 4.3 节)、辐射反作用 (第 4.4 节) 和频域波形 (第 4.5 节) 的结果。最后在第 4.6 节讨论基于引力波观测对 dCS 引力的约束。本章理论推导部分主要参考文献^[100]。

在本节的计算中主要涉及两个参考系——波源参考系和传播参考系。波源参考系标以双黑洞系统质心为原点，以轨道角动量方向为 z 轴， y 轴指向约化单体相对质心的初始方位，以确保 $\phi_0 = 0$ 。传播系的 z 轴指向观测者方向，在波源参考系中，观测者方位矢量为 $\hat{\mathbf{N}} = (\sin \iota \sin \omega, \sin \iota \cos \omega, \cos \iota)$ ，其中 ι 代表观测者视线方向与波源轨道平面的夹角， ω 代表观测者相对双星初始状态的方位角。

4.1 准开普勒参数化

运动方程是天体相对坐标相对时间的二阶微分方程，需要给出初始位置和初始速度两组初始条件。在守恒量的帮助下，我们可以对运动方程进行一次积分，降阶为两个一阶方程，只需要给出天体的初始相对位置和守恒量即可确定它们的解^[91]。对于一个由两个质量 m_A ，自旋角动量 \mathbf{S}_A 构成的、相互间距远大于各自特征尺度的双黑洞系统，其守恒能量由 (3.44)，轨道角动量由 (3.49) 给出。在自旋平行情况下，有 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_A = 0$ ，守恒能量的 dCS 修正部分简化为

$$\delta\epsilon = -\frac{1}{3}\delta\varpi \left(\frac{m}{r}\right)^3, \quad (4.1)$$

其中修正系数 $\delta\varpi$ 是

$$\delta\varpi \equiv \zeta \left[\frac{75}{256} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 - \frac{603}{3584} \left(\frac{m^2}{m_1^2} \chi_1^2 + \frac{m^2}{m_2^2} \chi_2^2 \right) \right]. \quad (4.2)$$

其中 $\chi_A = S_A^z/m_A^2$ 是黑洞的无量纲自旋。 $\chi_1 \chi_2$ 一项来自与标量场的耦合， χ_1^2 和 χ_2^2 两项来自于自旋四极矩与外场的耦合。另一个守恒量——轨道角动量则由方程 (3.49) 给出，dCS 不贡献任何修正^[157]。

角动量守恒决定了自旋平行双星系统被限制在轨道平面内运动。因此采用极坐标——径向坐标 r 和方位角坐标 ϕ ——描述系统的运动会更加方便。在波源

参考系中定义双星的相对位置矢量为 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ ，方向为从黑洞 1 指向黑洞 2。在轨道平面上与 $\hat{\mathbf{n}}$ 正交的基矢为 $\hat{\lambda} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ 。所以相对速度矢量 \mathbf{v} 可以由极坐标写为 $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{n}} + r\dot{\phi}\hat{\lambda}$ ，其中 $\dot{}$ 代表时间导数。结合守恒量 (3.44, 3.49)，我们可以重新给出一组只包含一阶导数的运动方程，分别是

$$\dot{r}^2 = 2\varepsilon + 2\gamma - j^2\gamma^2 + \frac{2}{3}\delta\varpi\gamma^3, \quad \text{和} \quad m\dot{\phi} = j\gamma^2, \quad (4.3)$$

其中 $\gamma \equiv m/r$ 和 $mj \equiv \mathbf{h} = |\mathbf{h}|$ 。径向方程可通过积分

$$t - t_0 = \pm \frac{m}{j} \int \frac{(1 + \frac{2}{3}\frac{\delta\varpi}{j^4}) + \frac{1}{3}\frac{\delta\varpi}{j^2}\gamma}{\gamma^2\sqrt{(\gamma_+ - \gamma)(\gamma - \gamma_-)}} d\gamma = \pm \int T(\gamma) d\gamma. \quad (4.4)$$

求解得到。在方程 (4.4) 中， γ_{\pm} 定义为双星系统的近心点和远心点，可以微扰地解出

$$\gamma_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2j^2\varepsilon}}{j^2} \left[1 \pm \frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \frac{(1 \pm \sqrt{1 + 2j^2\varepsilon})^2}{\sqrt{1 + 2j^2\varepsilon}} \right]. \quad (4.5)$$

t_0 是一个积分常数，代表天体首次经过近心点的时间。

相似地，角向运动方程的解也具有类似的形式

$$\phi - \phi_0 = \pm \int \frac{(1 + \frac{2}{3}\frac{\delta\varpi}{j^4}) + \frac{1}{3}\frac{\delta\varpi}{j^2}\gamma}{\sqrt{(\gamma_+ - \gamma)(\gamma - \gamma_-)}} d\gamma = \pm \int \Phi(\gamma) d\gamma, \quad (4.6)$$

其中 ϕ_0 是另一个积分常数，代表了近心点的初始方位角坐标。

最后，积分 (4.4, 4.6) 中额外的正负号由天体的运动情况确定，当天体从近心点移动到远心点的过程中，这些积分可以计算为

$$t - t_0 = \int_{\gamma}^{\gamma_+} T(\gamma) d\gamma, \quad \text{and} \quad \phi - \phi_0 = \int_{\gamma}^{\gamma_+} \Phi(\gamma) d\gamma, \quad (4.7)$$

反之，这些积分是

$$t - t_0 = \int_{\gamma_-}^{\gamma} T(\gamma) d\gamma + \int_{\gamma_-}^{\gamma_+} T(\gamma) d\gamma, \quad \text{and} \quad \phi - \phi_0 = \int_{\gamma_-}^{\gamma} \Phi(\gamma) d\gamma + \int_{\gamma_-}^{\gamma_+} \Phi(\gamma) d\gamma. \quad (4.8)$$

在广义相对论极限下 ($\delta\varpi \rightarrow 0$)，积分 (4.4, 4.6) 给出一个确切的椭圆轨道，由两个轨道根数描述——偏心率 e 和半长轴 a ，此时这两个参数具有确切的几何意义。轨迹方程写为 $r = r(\phi)$ 是 $r = a(1 - e^2)/[1 - e \cos(\phi - \phi_0)]$ 。这一方案称为 Kepler 参数化。然而，当考虑高阶后牛顿修正时，引力相互作用偏离平方反比定律。根据 Bertrand 定理^[179]，此时轨道不再是一个封闭的椭圆，因此偏心率和半长轴的定义也不再确切。为解决这一问题，我们采用准开普勒参数化方案，根据近心点和远心点引入两个新的轨道根数，“径向”偏心率 e_r 和“径向”半长轴 a_r ，定义为

$$a_r \equiv 2m \frac{\gamma_+ \gamma_-}{\gamma_+ + \gamma_-}, \quad \text{和} \quad e_r \equiv \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{\gamma_+ + \gamma_-}, \quad (4.9)$$

双星轨道方程参数化为

$$\gamma = \frac{\xi}{1 - e_r \cos u}, \quad \text{和} \quad \xi = \frac{m}{a_r}. \quad (4.10)$$

其中 u 是偏近点角，与真近点角 $V \equiv \phi - \phi_0$ 由以下几何关系关联起来，

$$\cos V = \frac{\cos u - e_r}{1 - e_r \cos u}, \quad \text{和} \quad \sin V = \frac{\sqrt{1 - e_r^2} \sin u}{1 - e_r \cos u}, \quad (4.11)$$

或

$$V \equiv 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1 + e_r}{1 - e_r}} \tan \left(\frac{u}{2} \right) \right]. \quad (4.12)$$

当假定偏心率 e_r 为零时，相对距离 r 约化为一个常数，于是偏心轨道退化为一个圆轨道。偏近点角和真近点角之间的关系如图 (4.1) 所示。

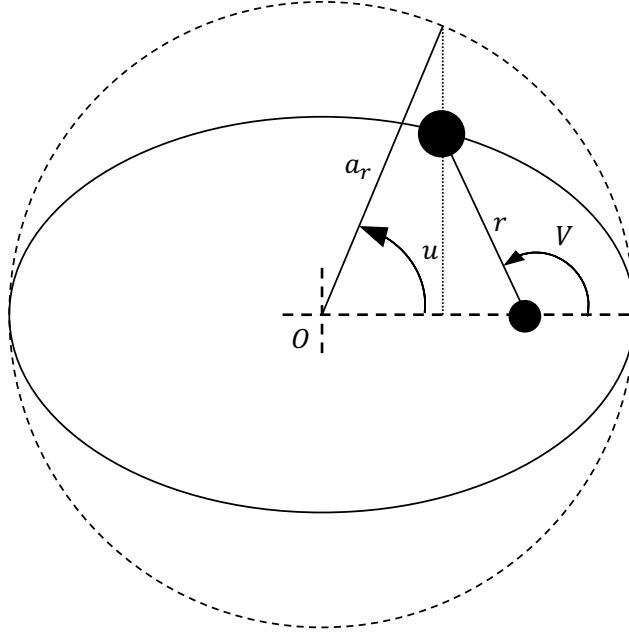


图 4.1 偏近点角和真近点角的几何关系示意图。

利用方程 (4.5)，可以将轨道根数 (4.9) 用守恒能量和角动量表示为

$$\xi = -2\varepsilon \left(1 - \frac{2}{3} \delta\varpi \frac{\varepsilon}{j^2} \right), \quad \text{和} \quad e_r = \sqrt{1 + 2j^2\varepsilon} \left(1 - \frac{4}{3} \delta\varpi \frac{\varepsilon}{j^2} \frac{1 + j^2\varepsilon}{1 + 2j^2\varepsilon} \right). \quad (4.13)$$

需要说明的是，此时双星的轨道不再是椭圆，因此所谓的“径向”偏心率和“径向”半长轴等参数的几何意义是模糊的。它们只应当被理解为两个与守恒能量和角动量相关的参数。相反地，守恒能量和角动量也可以用轨道根数表出，分别是

$$\varepsilon = -\frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \delta\varpi \frac{\xi^2}{1 - e_r^2} \right), \quad (4.14)$$

和

$$j = \frac{\sqrt{1-e_r^2}}{\sqrt{\xi}} \left[1 + \frac{1}{6} \delta\varpi \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 (3+e_r^2) \right]. \quad (4.15)$$

参数化的时间和方位角积分 (4.4, 4.6) 分别是

$$\begin{aligned} t &= \frac{m}{j} \frac{\sqrt{1-e_r^2}}{\xi^2} \int_0^u \left[- \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \right) (1 - e_r \cos u) - \frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^2} \xi \right] du \\ &= \frac{m}{j} \frac{\sqrt{1-e_r^2}}{\xi^2} \left\{ \left[\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \right) + \frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^2} \xi \right] u - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \right) e_r \sin u \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{1-e_r^2} \int_0^u \frac{1}{(1-e_r \cos u)^2} \left[- \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \right) (1 - e_r \cos u) - \frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^2} \xi \right] du \\ &= \left[\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta\varpi}{j^4} \right) + \frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^2} \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right) \right] V + e_r \left[\frac{1}{3} \frac{\delta\varpi}{j^2} \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right) \right] \sin V. \end{aligned} \quad (4.17)$$

不失一般性，积分常数 t_0 和 ϕ_0 已经被取为零。从上述两个积分结果中，我们可以提取出两个重要的参数，时间周期和方位角周期，分别由时间积分和方位角积分在第一次回到近心点时的取值确定，即

$$T \equiv t(u = 2\pi) = 2\pi m (-2\varepsilon)^{-3/2}, \quad (4.18)$$

$$K \equiv \phi(u = 2\pi) = 2\pi \left(1 + \frac{\delta\varpi}{j^4} \right), \quad (4.19)$$

Newton 阶的双星轨道是标准的椭圆，因此天体可以在一个时间周期内精确地回到近心点处，完成一个方位角周期。然而，在高阶后牛顿近似中，双星运动的时间周期和方位角周期不再相等，呈现出双周期结构^[38-39]。一个时间周期内，天体的方位角运动超过了 2π ，而多余部分则构成了近心点的进动^[91,180-183]。

至此，我们可以对自旋平行双星系统运动方程的准开普勒参数化解进行总结，并将最终结果——时间和方位角——用偏近点角完全表示出来。它们分别是

$$\frac{2\pi}{T} t(u) = u - e_t \sin u, \quad (4.20)$$

和

$$\frac{2\pi}{K} \phi(u) = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e_\phi}{1-e_\phi}} \tan \left(\frac{u}{2} \right) \right], \quad (4.21)$$

方程 (4.20) 一般被称为修正的 Kepler 方程。结合径向运动 $r = a_r(1 - e_r \cos u)$ ，我们完成了对参数化的讨论。在最终结果 (4.20) 和 (4.21) 中，我们引入了时间偏心率 e_t 和方位角偏心率 e_ϕ 以化简复杂的表达式。它们不是独立的新的参数，而是与守恒量之间按如下方程关联在一起，

$$e_t = e_r \left(1 + \frac{2}{3} \delta\varpi \frac{\varepsilon}{j^2} \right), \quad \text{和} \quad e_\phi = e_r \left(1 - \frac{2}{3} \delta\varpi \frac{\varepsilon}{j^2} \right). \quad (4.22)$$

同时，我们也可以将它们用径向轨道根数 e_r 和 a_r 表示出来，即

$$e_t = e_r \left(1 - \frac{1}{3} \delta\varpi \frac{\xi^2}{1 - e_r^2} \right), \quad \text{和} \quad e_\phi = e_r \left(1 + \frac{1}{3} \delta\varpi \frac{\xi^2}{1 - e_r^2} \right). \quad (4.23)$$

此外，时间和方位角周期也可以用径向根数 e_r 和 ξ 表出，

$$T = 2\pi \frac{m}{\xi^{3/2}} \left(1 + \frac{1}{2} \delta\varpi \frac{\xi^2}{1 - e_r^2} \right), \quad \text{和} \quad K = 2\pi \left[1 + \delta\varpi \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 \right]. \quad (4.24)$$

ξ 是可以表征后牛顿展开阶次的参数之一，一个 n PN 修正项包含一个 ξ^n 因子。我们可以再次发现，dCS 理论对双黑洞动力学产生 2PN 修正。

从方位角周期中可以定义一个有用的物理量——进动率，

$$\beta \equiv \frac{K}{2\pi} - 1 = \delta\varpi \frac{\xi^2}{(1 - e_r^2)^2}. \quad (4.25)$$

旋近天体在经过一个周期的运动后，轨道近心点相对于上一周期会向前移动角度 $2\pi\beta$ 。在广义相对论的 1PN 近似中也可以预言相似的结果。该结果由 Einstein 给出并成功解释了水星近日点的残余进动^[7,91]。在 dCS 理论中，该进动率会在 2PN 阶次出现一个新的修正。另一个重要事实是，进动率在取偏心率为零时不会回到零，即近心点进动即使在圆轨道情形下仍会存在。这显然是非物理的。这根源源于近心点的定义在圆轨道情形下失效。在后续推导中，这一反常可以通过定义轨道频率 Ω

$$\Omega \equiv \frac{K}{T} = \frac{\xi^{3/2}}{m} \left[1 + \frac{\delta\varpi}{2} \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 (1 + e_r^2) \right], \quad (4.26)$$

或对应无量纲量

$$x \equiv (m\Omega)^{2/3}, \quad (4.27)$$

加以消除。 ξ, x 是两个可以用于表征后牛顿展开阶次的物理量， n PN 修正项一般携带 ξ^n 因子或 x^n 因子。半长轴和轨道频率之间的关系称为 Kepler 第三定律。在 dCS 理论中，包含主导阶后牛顿修正的第三定律写为

$$\xi = x \left[1 - \frac{\delta\varpi}{3} \left(\frac{x}{1 - e_r^2} \right)^2 (1 + e_r^2) \right], \quad (4.28)$$

这一关系将被频繁地应用于后续推导当中。

最后，作为后续推导计算的准备，我们将径向坐标和方位角坐标时间导数的参数化展示于此，它们分别是

$$\dot{r} = \sqrt{\xi} \frac{e_r \sin u}{1 - e_r \cos u} \left[1 - \frac{1}{6} \delta\varpi \frac{\xi^2 (3 - e_r \cos u)}{(1 - e_r^2)(1 - e_r \cos u)} \right], \quad (4.29)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\xi^{3/2}}{m} \frac{\sqrt{1 - e_r^2}}{(1 - e_r \cos u)^2} \left[1 + \frac{1}{6} \delta\varpi \frac{\xi^2 (3 + e_r^2)}{(1 - e_r^2)^2} \right]. \quad (4.30)$$

4.2 引力波极化

我们在本节中解决一个关键问题——在 dCS 理论中引力波是否存在额外极化模式？我们首先对 Newman-Penrose (NP) 标架进行简要介绍，作为研究引力波极化的主要工具。不失一般性地，我们对圆轨道极限下双黑洞系统辐射引力波的极化模式进行计算。最终我们发现，引力波在 dCS 理论中仍然只具有 + 和 \times 两个极化模式^[99]。同时我们将说明，在不考虑宇宙膨胀的情况下，远场区域的引力波不会呈现出宇称破缺现象。

4.2.1 Newman-Penrose 标架和引力波极化

NP 标架是指一组由类光基矢构成的标架。设标架的四条腿为^[99,184]

$$e_{(a)} \equiv (l, q, m, \bar{m}),$$

其中 \bar{m} 是 m 的复共轭。在直角系 $\{t, x, y, z\}$ 中， l, q, m 的定义是

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \quad \text{和} \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0). \quad (4.31)$$

这些基矢之间满足正交关系 $l \cdot l = q \cdot q = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = 0$ 和 $l \cdot q = -1, m \cdot \bar{m} = 1$ 。平直时空度规可以由类光标架表示为 $\eta^{\mu\nu} = -l^\mu q^\nu - q^\mu l^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu$ 。将该方程投影到类光标架 $e_{(a)}$ ，得到 NP 形式下的平直度规^[184]，

$$\eta_{(a)(b)} \equiv e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

我们使用 $\eta_{\mu\nu}$ 和 $\eta^{\mu\nu}$ 升降坐标指标，用 $\eta_{(a)(b)}$ 和 $\eta^{(a)(b)}$ 升降标架指标。任意张量都可以投影到类光标架上，例如对 Riemann 张量，有

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{\mu\nu\rho\lambda} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu e_{(c)}^\rho e_{(d)}^\lambda. \quad (4.33)$$

在 NP 形式中，我们通常采用 10 个 Ricci 标量 (Φ_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$) 和 Λ) 和 5 个复的 Weyl 标量 (Ψ_0, \dots, Ψ_4) 来描述弯曲时空。本文中，我们用到其中四个，它们在真空场中的定义为

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{1}{6} R_{(2)(1)(2)(1)}, & \Psi_3 &= \frac{1}{2} R_{(2)(1)(2)(4)}, \\ \Psi_4 &= R_{(2)(4)(2)(4)}, & \Phi_{22} &= R_{(2)(4)(2)(3)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

这些量都是标量，不依赖于坐标选择，且在平直时空背景下都是规范不变量。

另一方面我们考察引力波的观测效应。考虑距离相近的两个试探粒子，其空间间距记做偏离矢量 ξ^j ，在引力场作用下满足测地偏离方程^[91]

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = -R_{0i0j} \xi^j, \quad (4.35)$$

当引力波通过时， ξ^j 会受到潮汐作用而发生相应变化。矩阵 R_{0i0j} 有六个独立分量，这说明引力波至多存在六种不同的观测效应，这对应了引力波可能存在的全部六种独立极化模式。在广义相对论中，通过施加 TT 规范，我们可以发现 R_{0i0j} 只有两个独立分量非零，这对应了引力波的两个自由度，即 + 模和 × 模。而在修改引力中，引力波的自由度数量可能超过 2，因此不能任意地使用 TT 规范。而 NP 标量是一组规范不变量，且与引力波观测效应直接关联，因此成为研究修改引力下引力波极化模式的有效工具。利用 Ricci 标量 Φ_{22} 和 Weyl 标量 $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$ ， R_{0i0j} 的各个分量写为

$$R_{0i0j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Phi_{22} + \text{Re}\Psi_4) & -\frac{1}{2}\text{Im}\Psi_4 & 2\text{Re}\Psi_3 \\ -\frac{1}{2}\text{Im}\Psi_4 & \frac{1}{2}(\Phi_{22} - \text{Re}\Psi_4) & -2\text{Im}\Psi_3 \\ 2\text{Re}\Psi_3 & -2\text{Im}\Psi_3 & 6\Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

“Re”和“Im”代表了物理量的实部和虚部。另一方面，极化模式可以按照 Riemann 张量 (4.35) 的各个分量定义为如下形式，

$$R_{0i0j} = \begin{pmatrix} \ddot{H}_b + \ddot{H}_+ & \ddot{H}_x & \ddot{H}_x \\ \ddot{H}_x & \ddot{H}_b - \ddot{H}_+ & \ddot{H}_y \\ \ddot{H}_x & \ddot{H}_y & \ddot{H}_L \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

在方程 (4.37) 中， H_+ 和 H_x 代表引力波的 + 模和 × 模，也是广义相对论中引力波仅有的两种极化模式，它们都代表了自旋为 2 的张量自由度。其余的四个额外极化模式包含两个标量模式——呼吸模 H_b 和纵向模 H_L ，和两个矢量模式—— x 模式 H_x 和 y 模式 H_y ^[185]。六种极化模式的观测效应如图 (4.2) 所示。

4.2.2 圆轨道双星辐射过程中的引力波极化

简单但不失一般性地，我们在圆轨道双黑洞系统中考察引力波的极化。设观测者在波源参考系中的方位矢量为 $\hat{\mathbf{N}} = (0, \sin \iota, \cos \iota)$ ，此时 ω 可以取为零，因为圆轨道不存在特殊方向以分辨近心点的初始方位角。此时双黑洞的相对位置和速度写为 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ 和 $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{r}(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ 。于是，将运动方程代入 dCS 张量辐射 (3.80) 并变换到传播系中，得到

$$\bar{k}_{ij}(\hat{\mathbf{N}}) = -\frac{2\mu x^3}{R} \delta \varpi \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \cos \iota \sin 2\phi & \sin \iota \sin 2\phi \\ \cos \iota \sin 2\phi & -\cos^2 \iota \cos 2\phi & -\sin \iota \cos \iota \cos 2\phi \\ \sin \iota \sin 2\phi & -\sin \iota \cos \iota \cos 2\phi & -\sin^2 \iota \cos 2\phi \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

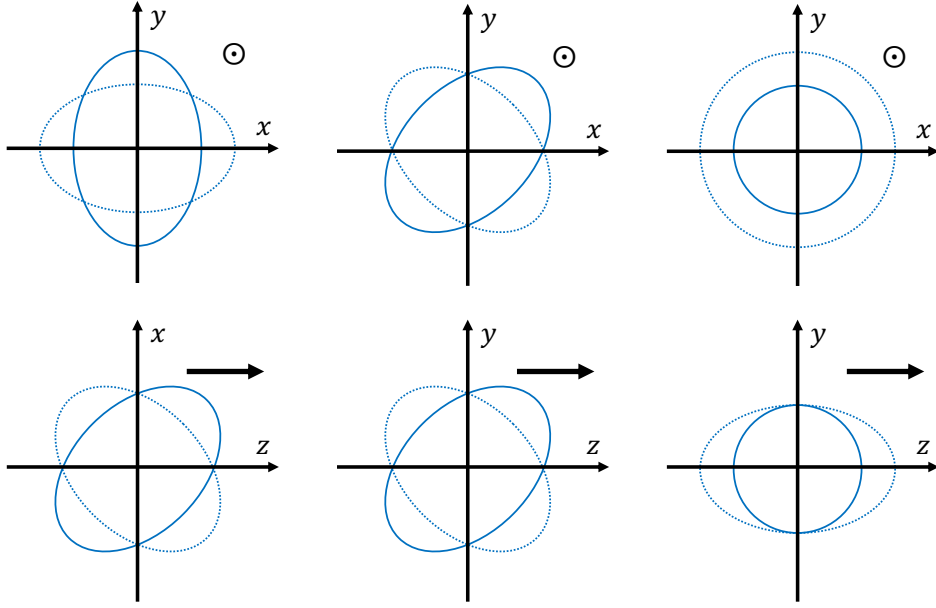


图 4.2 引力波六种可能的极化模式，从上到下、从左到右依次代表 + 模式、× 模式、呼吸模式、矢量 x 模式、矢量 y 模式和纵向模式。上面三张图右上角的 \odot 代表引力波垂直纸面向外传播，下面三张图右上角的 \rightarrow 代表引力波向右传播。

这里 ϕ 的含义略有不同，由于推迟效应的存在，它代表了在推迟时间 t_r 处的轨道相位，即 $\phi(t) \equiv \Omega t_r = \Omega(t - R)$ 。其中若干常数项已经略去，因为它们不呈现震荡效应，对引力辐射的能流没有贡献。对应地，dCS 引力辐射场的时间和时空分量由 Lorenz 规范 (2.72) 确定，分别是

$$\bar{k}_{0i} = \int dt (\partial_j \bar{k}_{ji}) = -\bar{k}_{zi}, \quad \text{和} \quad \bar{k}_{00} = \int dt (\partial_j \bar{k}_{j0}) = -\bar{k}_{z0} = \bar{k}_{zz}. \quad (4.39)$$

我们将 dCS 修正部分的 Ricci 标量和 Weyl 标量标记为 $\delta\Psi_2$ 、 $\delta\Psi_3$ 、 $\delta\Psi_4$ 和 $\delta\Phi_{22}$ 。计算表明，非零量只有

$$k_+ - ik_- = \frac{1}{2} \int dt \int dt' \delta\Psi_4 = -\frac{2\mu x^3}{R} \delta\varpi \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos 2\phi - i \cos \iota \sin 2\phi \right). \quad (4.40)$$

同时，其他 NP 标量为零， $\delta\Psi_2 = \delta\Psi_3 = \delta\Phi_{22} = 0$ 。这一结果意味着 dCS 理论中引力波不存在额外的极化模式，且这一结论与^[99]一致。

尽管 dCS 理论引入了一个新的标量自由度，但是引力辐射中却并没有呈现出对应的标量极化模式。主要原因有二。首先 dCS 理论是一个二次理论，在作用量中，标量场与 Riemann 张量的平方相互耦合，这就导致了线性阶次的标量场和度规场是相互独立的。因此引力辐射中没有受到标量场的激发而产生呼吸模式。与之相对应的是 Brans-Dicke 理论。作为一个一次理论，Brans-Dicke 标量场与 Ricci 张量直接耦合，最终导致了呼吸模式的出现^[168]。同时，注意到 Cotton 张量是无迹的，这导致了线性化度规场方程不存在一个等效质量项，即 dCS 理

论是一个无质量引力理论，从而也就不会导致纵向模式的出现。与之相对应的是 $f(\mathbf{R})$ 引力理论。 $f(\mathbf{R})$ 理论中引力场方程的迹具有 $(\square_g^2 - m_g^2)\mathbf{R} = 0$ 的形式， m_g 为 $f(\mathbf{R})$ 引力的等效质量。这意味着该理论中引力波传播满足有质量波动方程，是一个有质量引力理论，并最终导致了纵向模式的出现^[186]。尽管本节所展示的仅仅是精确到 2PN、准圆轨道近似下引力波的极化模式，但是因为我们对该结果的分析基于 dCS 理论的作用量，所以“不存在额外极化模式”的结论是一般性的，不依赖于后牛顿展开，也不依赖于双星轨道的形状。在后续的计算中，我们可以放心地使用 TT 规范来提取 dCS 引力波的极化模式。

正如方程 (4.40) 所示，dCS 理论中的两个极化模式在远场区域是对称地产生的，没有呈现出宇称破缺效应。这是由于我们只关注波动区域内引力场在短时标内的行为，而这一时标远远地小于宇宙膨胀时标，因此可以忽略宇宙膨胀和标量场真空期望值演化对该过程的影响。在第 2.2 节中，我们已经在宇宙学背景时空下讨论了引力波的传播过程，标量场背景会诱导速度双折射现象，是宇称破缺的主要表现形式。

4.3 自旋平行双黑洞系统在做一般平面轨道运动时的引力波形

本节我们计算自旋平行双黑洞系统在做一般平面运动时的引力辐射。在波源参考系中，探测器方向记做单位矢量 $\hat{\mathbf{N}} = (\sin \iota \sin \omega, \sin \iota \cos \omega, \cos \iota)$ 。双星的相对位置矢量和相对速度矢量是 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ 、 $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ 和 $\mathbf{v} = r\dot{\mathbf{n}} + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 。根据轨道运动的准开普勒参数化解 (4.21)，方位角 ϕ 应当表述为真近点角 V 的函数，

$$\phi \simeq (1 + \beta)V + \frac{1}{3}\delta\varpi \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 e_r \sin V, \quad (4.41)$$

其中 β 是进动率 (4.25)，与 $\delta\varpi$ 都是正比于耦合常数 ζ 的小量。精确到 ζ 的线性阶可以得到

$$\sin \phi = \sin(1 + \beta)V + \frac{1}{3}\delta\varpi \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 e_r \cos(1 + \beta)V \sin V, \quad (4.42a)$$

$$\cos \phi = \cos(1 + \beta)V - \frac{1}{3}\delta\varpi \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 e_r \sin(1 + \beta)V \sin V. \quad (4.42b)$$

需要注意的是，因为角度值 V 是随着时间流逝而逐渐增大的，所以 βV 不能看做小量，也就不能进行 Taylor 展开。但是 $\sin V$ 和 $\cos V$ 是一个绝对值小于 1 的变数， $\delta\varpi \sin V$ 和 $\delta\varpi \cos V$ 可以被看做小量进行 Taylor 展开。

这里可以再次展示出 2PN 近似下双黑洞运动中的双周期结构。第一个周期由 $\sin(1 + \beta)V$ 和 $\cos(1 + \beta)V$ 给出。在这样一个周期内，天体的方位角经过 2π 。第二个周期由 $\sin V$ 和 $\cos V$ 给出。在经过这样一个周期后天体回到近心点。

1. 标量辐射

在第 3.4 节的讨论中，我们已经给出了标量辐射的一般表达式 (3.61)。在自旋平行情况下，我们有 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$ 。将参数化解 (4.20, 4.21) 代入 (3.61) 中，得到

$$\vartheta = -\frac{2m\nu}{R} \frac{5}{16} \frac{\alpha}{\beta m^2} \frac{\xi^2 (1 + e_r \cos V)^2}{\nu (1 - e_r^2)^2} \tilde{\mathbf{A}} \sin \iota \cos \iota \sin(V + \omega). \quad (4.43)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}} \equiv |\tilde{\mathbf{A}}|$ 。这样，我们就把标量辐射波形写成了关于真近点角 V 和空间坐标 (R, ι, ω) 的函数。

2. 引力辐射

在自旋平行假设下，引力波形的一般表达式 (3.80) 可以简化为

$$\delta \xi_{ij} = -2\delta\varpi\gamma^3 \hat{n}_i \hat{n}_j. \quad (4.44)$$

将 $\hat{\mathbf{n}}$ 代入 (3.65, 4.44)，得到 OPN 波形和 dCS 修正分别为

$$\xi_{11}^{(0)} = 2 \left[(\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi)^2 - \frac{m}{r} \cos^2 \phi \right], \quad (4.45a)$$

$$\xi_{12}^{(0)} = 2 \left[(\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi)(\dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi) - \frac{m}{r} \sin \phi \cos \phi \right], \quad (4.45b)$$

$$\xi_{22}^{(0)} = 2 \left[(\dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi)^2 - \frac{m}{r} \sin^2 \phi \right], \quad (4.45c)$$

和

$$\delta \xi_{ij} = -\delta\varpi\gamma^3 \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \phi & 2 \sin \phi \cos \phi \\ 2 \sin \phi \cos \phi & 2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

基于第 4.2 节对引力波极化模式的讨论，我们知道在 dCS 理论中仍然可以使用 TT 规范消除引力辐射中的残余自由度。定义 TT 规范投影算符为 $\hat{\Lambda}_{ij,kl}(\hat{\mathbf{N}}) \equiv \Pi_{ik} \Pi_{jl} - (1/2) \Pi_{ij} \Pi_{kl}$ ，其中 $\Pi_{ij} \equiv \delta_{ij} - \hat{N}_i \hat{N}_j$ 。将 ξ_{ij} 从波源参考系变换到传播系，并作用 TT 算符 $\hat{\Lambda}_{ij,kl}$ ，从而得到 TT 规范下的引力波形，记做 ξ_{ij}^{TT} 。于是引力波的 + 模和 \times 模分别写为

$$\xi_+ \equiv \xi_{11}^{\text{TT}} = \xi_+^{(0)} + \delta \xi_+ \quad \text{和} \quad \xi_\times \equiv \xi_{12}^{\text{TT}} = \xi_\times^{(0)} + \delta \xi_\times, \quad (4.47)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_+^{(0)} &= [(\dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 - \gamma) \cos(2\omega) - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin(2\omega)] \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\phi) \\ &\quad + [-(\dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 - \gamma) \sin(2\omega) - 2r\dot{r}\dot{\phi} \cos(2\omega)] \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \sin(2\phi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin^2 \iota [(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \gamma], \end{aligned} \quad (4.48a)$$

$$\begin{aligned} \xi_\times^{(0)} &= [\sin(2\omega) (\dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 - \gamma) + 2r\dot{r}\dot{\phi} \cos(2\omega)] \cos \iota \cos(2\phi) \\ &\quad + [\cos(2\omega) (\dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 - \gamma) - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin(2\omega)] \cos \iota \sin(2\phi), \end{aligned} \quad (4.48b)$$

$$\delta\xi_+ = -\delta\varpi\gamma^3 \left[\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} + \frac{\sin^2 \iota}{2} \cos(2\phi + 2\omega) \right], \quad (4.49a)$$

$$\delta\xi_\times = -\delta\varpi\gamma^3 \cos \iota \sin(2\phi + 2\omega). \quad (4.49b)$$

将准开普勒参数化解——方程 (4.10, 4.20, 4.21, 4.29, 4.30) 代入波形 (4.48, 4.49), 并表示为真近点角 V 的函数,

$$\begin{aligned} \xi_+^{(0)} = & \frac{\xi}{1 - e_r^2} \left\{ -\frac{1}{2} e_r^2 \left[(1 + \cos^2 \iota) \cos(2\beta V + 2\omega) - \sin^2 \iota \right] \right. \\ & - \frac{5}{4} e_r (1 + \cos^2 \iota) \cos[(1 + 2\beta)V + 2\omega] \cos V + \frac{1}{2} e_r \sin^2 \iota \cos V \\ & \left. - (1 + \cos^2 \iota) \cos[(2 + 2\beta)V + 2\omega] - \frac{1}{4} e_r (1 + \cos^2 \iota) \cos[(3 + 2\beta)V + 2\omega] \right\}, \end{aligned} \quad (4.50a)$$

$$\begin{aligned} \xi_\times^{(0)} = & \frac{\xi}{1 - e_r^2} \left\{ -e_r^2 \sin(2\beta V + 2\omega) - \frac{5}{2} e_r \sin[(1 + 2\beta)V + 2\omega] \right. \\ & \left. - 2 \sin[(2 + 2\beta)V + 2\omega] - \frac{1}{2} e_r \sin[(3 + 2\beta)V + 2\omega] \right\} \cos \iota, \end{aligned} \quad (4.50b)$$

$$\begin{aligned} \delta\xi_+ = & \frac{\xi^3}{(1 - e_r^2)^3} \delta\varpi \left\{ -\frac{1}{12} e_r (11 + 6e_r^2) (1 + \cos^2 \iota) \cos[(1 + 2\beta)V + 2\omega] \right. \\ & - \frac{1}{8} e_r (4 + e_r^2) \sin^2 \iota \cos V + \frac{3}{8} e_r^3 (1 + \cos^2 \iota) \sin(2\beta V + 2\omega) \sin V \\ & - \frac{1}{4} e_r^2 \sin^2 \iota \cos 2V - \frac{1}{4} (4 + 7e_r^2) (1 + \cos^2 \iota) \cos[(2 + 2\beta)V + 2\omega] \\ & - \frac{1}{24} e_r^3 \sin^2 \iota \cos 3V - \frac{1}{48} e_r (76 + 13e_r^2) (1 + \cos^2 \iota) \cos[(3 + 2\beta)V + 2\omega] \\ & \left. - \frac{13}{24} e_r^2 (1 + \cos^2 \iota) \cos[(4 + 2\beta)V + 2\omega] - \frac{1}{16} e_r^3 (1 + \cos^2 \iota) \cos[(5 + 2\beta)V + 2\omega] \right\}, \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \delta\xi_\times = & \frac{\xi^3}{(1 - e_r^2)^3} \delta\varpi \left\{ -\frac{1}{6} e_r (11 + 6e_r^2) \cos \iota \sin[(1 + 2\beta)V + 2\omega] \right. \\ & - \frac{3}{4} e_r^3 \cos \iota \cos(2\beta V + 2\omega) \sin V - \frac{1}{2} (4 + 7e_r^2) \cos \iota \sin[(2 + 2\beta)V + 2\omega] \\ & - \frac{1}{24} e_r (76 + 13e_r^2) \cos \iota \sin[(3 + 2\beta)V + 2\omega] - \frac{13}{12} e_r^2 \cos \iota \sin[(4 + 2\beta)V + 2\omega] \\ & \left. - \frac{1}{8} e_r^3 \cos \iota \sin[(5 + 2\beta)V + 2\omega] \right\}. \end{aligned} \quad (4.51b)$$

当取 $e_r = 0$ 和 $\omega = 0$ 时, 上述波形回到圆轨道情形,

$$\xi_+^{(0)} = -\xi(1 + \cos^2 \iota) \cos(2 + 2\beta)V = -\xi(1 + \cos^2 \iota) \cos 2\phi, \quad (4.52a)$$

$$\xi_\times^{(0)} = -2\xi \cos \iota \sin(2 + 2\beta)V = -2\xi \cos \iota \sin 2\phi, \quad (4.52b)$$

$$\delta\xi_+ = -\delta\varpi\xi^3(1 + \cos^2 i) \cos(2 + 2\beta)V = -\delta\varpi\xi^3(1 + \cos^2 i) \cos 2\phi \quad (4.53a)$$

$$\delta\xi_\times = -2\delta\varpi\xi^3 \cos i \sin(2 + 2\beta)V = -2\delta\varpi\xi^3 \cos i \sin 2\phi, \quad (4.53b)$$

可以看到，相比于圆轨道波形，椭圆轨道波形具有更复杂的频谱结构。在圆轨道中，引力辐射的频率总为轨道频率 Ω 的两倍，相位总以 $2V$ 的形式出现。而在椭圆轨道中，相位在 Newton 阶以 $\{V, 2V, 3V\}$ 等形式出现，而在 dCS 修正中则以 $\{V, 2V, 3V, 4V, 5V\}$ 出现。此外，波形除了按照上述相位演化外，还受到近心点进动效应的低频调制，且由于近心点在圆轨道中的病态定义，该效应在 $e_r = 0$ 时不会消失。因此在方程 (4.52, 4.53) 中，需要通过代换 $(1 + \beta)V \rightarrow \phi$ 完成最后的计算。

4.4 辐射反作用

作为一种物质和可观测效应，引力波在离开波源系统时带走了能量和角动量。在守恒定律的支配下，引力波携带的能量和角动量，必然等于波源系统能量和角动量的损失。也可以等效地理解为，引力波对波源造成一个反向的力和力矩^[187]，导致双星除了稳定、规律的周期性旋近外，还存在一个非周期性的长时标演化。这一过程通常被称为轨道衰减。其基本特征是：(1) 双星的轨道频率升高，双星间距减小，当双星间距突破弱场的范围后，后牛顿近似失效，对双星动力学和辐射的描述进入数值相对论的研究范畴，最终导致二者的并合^[30]。(2) 系统的偏心率随着引力辐射减小，轨道发生圆化 (circularization)^[140-141]。因此，轨道衰减的存在也成为引力波存在的间接证据。Hulse 和 Taylor 通过对 PSR1913+16 的长期观测，确定了其周期导数的长时标演化^[14,188]。如图 (4.3) 该观测结果与广义相对论的预言一致，这也使得他们获得 1993 年度诺贝尔物理学奖。

在 dCS 引力中，不仅引力波形发生了改变，同时还有标量辐射的存在。这些修正都将影响双星系统的轨道衰减，并最终体现在引力波信号或脉冲双星的计时信号中。在本节中，我们对这一效应进行讨论。

4.4.1 能流

1. 广义相对论中引力波的能动张量

引力波能动张量的定义不是一个容易的任务。引力波在平直时空背景中的定义是明确的——任何不属于平直度规的扰动均可定义为引力波，但是，如果同时考虑引力波的能量，它同样会贡献到引力场方程的右侧，从而造成时空的弯

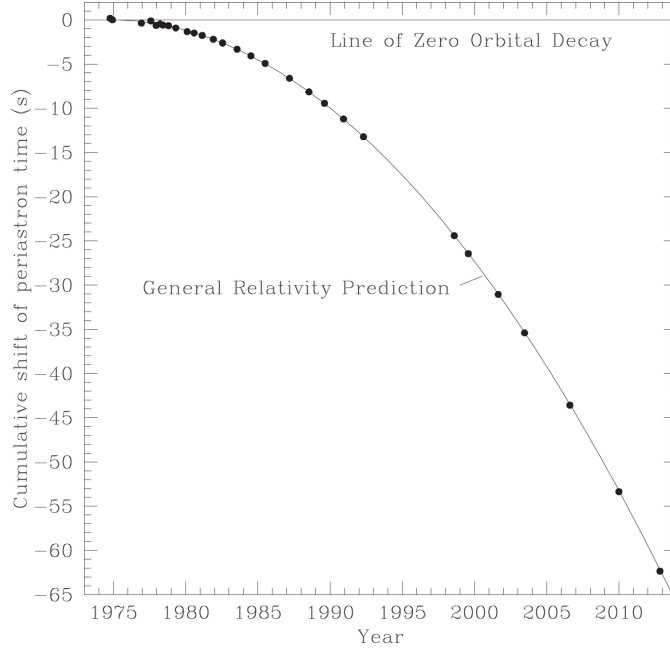


图 4.3 Hulse-Taylor 脉冲双星轨道衰减的长期观测，该图引自 [188]。横轴代表观测年份，纵轴是经过近心点时间的累积移动。图中的点代表了观测数据，曲线代表了广义相对论的理论预言，与观测相一致。

曲。这意味着我们必须在弯曲的、动力学的背景时空上定义扰动为

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^{(B)}(x) + h_{\mu\nu}(x). \quad (4.54)$$

随之带来的是另外一个严重的问题——背景和扰动都是随时间和空间变化的，如何明确地将它们区分开来？此时引力扰动和背景的物理本质并无不同，我们缺乏一个明确的界限对二者进行分离，就像我们无法严格地判定一滴水究竟是属于海洋上的波浪还是海洋的本底一样。

一种经典的区分方式是由文献 [189-190] 提出的，其中假定了引力场背景的特征尺度 \mathcal{R} 远远超过引力扰动的特征波长 λ ， $\lambda \ll \mathcal{R}$ 。在此基础上，我们可以通过构造高频成分的传播方程来解决引力波的定义问题，通过对低频成分的处理来确定引力波对背景的作用以及引力波能动张量的定义。这一方案称为短波近似。从背景度规附近对引力场方程进行展开

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(B)} + \mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{h}) + \mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \dots, \quad (4.55)$$

其中 $\mathbf{G}^{(B)}$ 仅由背景度规确定，只描述了低频长波模式， $\mathbf{G}^{(1)}$ 只含有 \mathbf{h} 的线性项，因此只描述高频短波模；而 $\mathbf{G}^{(2)}$ 包含 \mathbf{h} 的二次项，因此既包含了低频长波模也包含了高频短波模。因此引力场方程可以分为高频和低频两个部分

$$\mathbf{G}^{(B)} = - [\mathbf{G}^{(2)}]^{(\text{Low})} + 8\pi \mathbf{T}_{(m)}^{(\text{Low})}, \quad (4.56a)$$

$$\mathbf{G}^{(1)} = - [\mathbf{G}^{(2)}]^{(\text{High})} + 8\pi \mathbf{T}_{(m)}^{(\text{High})}. \quad (4.56b)$$

方程 (4.56b) 描述了线性引力波的产生和传播，(4.56a) 则描述了引力波对背景时空的反作用。在短波近似的框架下，引力波的能量仅在平均化意义上影响背景时空的曲率。选择一个恰当的尺度 $\tilde{\lambda}$ ，满足 $\lambda \ll \tilde{\lambda} \ll \mathcal{R}$ ，在 $\tilde{\lambda}$ 尺度下对引力场方程两边平均化。高频短波运动足够多次周期，平均化后取零；而低频长波在此尺度下几乎不呈现变化，因此平均化后取为一个非零常数，于是， $\langle \mathbf{G}^{(2)} \rangle = [\mathbf{G}^{(2)}]^{(\text{Low})}$ ， $\langle \mathbf{T}_{(m)} \rangle = \mathbf{T}_{(m)}^{(\text{Low})}$ 。描述背景曲率的运动方程写为

$$\mathbf{G}^{(\text{B})} = -\langle \mathbf{G}^{(2)} \rangle + 8\pi \langle \mathbf{T}_{(m)} \rangle, \quad (4.57)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 代表对多个短波波长平均。显然 $\langle \mathbf{G}^{(2)} \rangle$ 承担了能动张量的角色，因此将引力波的能动张量定义为

$$T_{\mu\nu}^{(\text{GW})} = \frac{1}{8\pi} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle, \quad (4.58)$$

该定义自动满足 Bianchi 恒等式 $\bar{\nabla}_{\mu} T_{(\text{GW})}^{\mu\nu} = 0$ 。取背景时空为平直时空，将二阶扰动对应的 Einstein 张量代入，并考虑到扰动 \mathbf{h} 符合 Lorenz 和无迹规范，得到

$$T_{\mu\nu}^{(\text{GW})} = \frac{1}{16\pi} \langle \Lambda_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = \frac{1}{32\pi} \langle (\partial_{\mu} h_{\alpha\beta})(\partial_{\nu} h^{\alpha\beta}) \rangle, \quad (4.59)$$

其中 $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}^{(2)}$ 定义在方程 (2.80) 中。

2. dCS 引力中的引力波能动张量和能流

在 dCS 修正中讨论引力波的能动张量，只需要将方程 (4.57) 扩展为

$$\mathbf{G}^{(\text{B})} = -\langle \mathbf{G}^{(2)} \rangle - \langle \mathbf{C}^{(2)} \rangle + 8\pi \langle \mathbf{T}_{(m)} + \mathbf{T}_{(\vartheta)} \rangle, \quad (4.60)$$

其中我们也对 C-张量根据不同扰动阶次分解。由于不考虑背景标量场，C-张量仅包含一阶和二阶扰动，即

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(1)}(\vartheta) + \mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{h}, \vartheta) + \dots. \quad (4.61)$$

考虑平直背景时空，代入二阶扰动的 Einstein 张量和 C-张量，即可得到修正的能动张量。其中对 Einstein 张量只需将广义相对论结果中的扰动 \mathbf{h} 替换为 \mathbf{H} ，C-张量的结果展示在方程 (2.86) 中，也就是 $C_{\mu\nu}^{(2)} = \tilde{C}_{\mu\nu}$ 。在计算 Einstein 张量的平均化时，需要考虑到 TT 规范对总扰动 $\mathbf{H} = \mathbf{h} + \mathbf{k}$ 仍然适用。在计算 C-张量的平均化时，需要考虑到 $\langle \epsilon^{\rho\lambda\alpha\beta}(\partial_{\alpha} f)(\partial_{\rho} g) \rangle = -\langle \epsilon^{\rho\lambda\alpha\beta}(\partial_{\rho} \partial_{\alpha} f)g \rangle = 0$ ，从而可知 C-张量对引力波能动张量没有贡献，于是能动张量最终写为

$$T_{\mu\nu}^{(\text{GW})} = \frac{1}{32\pi} \langle (\partial_{\mu} H_{\alpha\beta}^{\text{TT}})(\partial_{\nu} H_{\text{TT}}^{\alpha\beta}) \rangle. \quad (4.62)$$

其中 $\bar{H}_{\text{TT}}^{\alpha\beta}$ 是投影到 TT 规范上的引力波度规张量，由于 TT 规范使得反迹张量与原张量相同，所以我们去掉了度规符号上方的横线。在无穷远处对辐射场的各个

方向积分，得到辐射总能量是

$$\mathcal{F}_T = - \oint_{\partial\Omega} \left\langle \hat{N}_i T_{0i}^{(\text{GW})} \right\rangle R^2 d\Omega = \frac{1}{32\pi} R^2 \left[\oint_{\partial\Omega} \langle \dot{H}_{jk}^{\text{TT}} \dot{H}_{jk}^{\text{TT}} \rangle d\Omega \right], \quad (4.63)$$

但是对带偏心率的双星系统，其辐射场一般被表示为真近点角 V 的函数，而不是显含时间的函数，因此，方程 (4.63) 中的平均化可以改写为

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)^2 \frac{dV}{du} \frac{du}{dt} dV, \quad (4.64)$$

的形式，其中涉及到的导数可以从方程 (4.12, 4.20) 得到，分别是

$$\frac{dV}{du} = \frac{1 + e_r \cos V}{\sqrt{1 - e_r^2}}, \quad (4.65)$$

和

$$\frac{dt}{du} = \frac{m}{\xi^{3/2}} \frac{1 - e_r^2}{1 + e_r \cos V} \left[1 + \frac{\delta\varpi}{6} \frac{\xi^2}{(1 - e_r^2)^2} (3 + 2e_r \cos V - e_r^2) \right]. \quad (4.66)$$

将上面两式代入方程 (4.63)，并进行立体角积分后得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T = \frac{32}{5} \frac{v^2 x^5}{(1 - e_r^2)^{7/2}} & \left[\left(1 + \frac{73}{24} e_r^2 + \frac{37}{96} e_r^4 \right) \right. \\ & \left. + \delta\varpi \left(\frac{x}{1 - e_r^2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{449}{36} e_r^2 + \frac{1195}{144} e_r^4 + \frac{11}{48} e_r^6 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

第一行中的括号时广义相对论的预言结果，与标准教科书完全一致^[30,91,140]。后续正比于 ξ^2 的项则是 dCS 修正的部分，处于 2PN 修正阶次。

3. 标量辐射的能量

与引力辐射不同，标量场与背景时空分属不同的物理本质，因此对标量能流的定义无需引入平均化。但是为了保持计算的一致性，我们仍采用平均化的能流定义。从方程 (2.8) 出发，标量场的辐射能流是 $T_{0i}^{(\theta)} = \beta \dot{\vartheta}(\partial_i \vartheta)$ ^[191]。被标量辐射携带到时空无穷远处的总能量是能流矢量对无穷大球面通量的积分，

$$\mathcal{F}_S = - \oint_{\partial\Omega} \left\langle \hat{N}_i T_{0i}^{(\theta)} \right\rangle R^2 d\Omega = \beta R^2 \oint_{\partial\Omega} \langle \dot{\vartheta}^2 \rangle d\Omega, \quad (4.68)$$

代入相应的导数计算，并进行立体角积分后得到

$$\mathcal{F}_S = \frac{32}{5} \frac{v^2 x^5}{(1 - e_r^2)^{7/2}} \frac{25}{24576} \Delta^2 \left(\frac{x}{1 - e_r^2} \right)^2 \left[1 + \frac{19}{2} e_r^2 + \frac{69}{8} e_r^4 + \frac{9}{16} e_r^6 \right] \quad (4.69)$$

其中

$$\Delta^2 \equiv \frac{\xi}{v^2} \tilde{\Delta}^2. \quad (4.70)$$

方程 (4.69) 中的因子 $\frac{32}{5} \frac{v^2 x^5}{(1-e_r^2)^{7/2}}$ 是广义相对论预言辐射能流的主要系数^[30,91]，后面出现的 ξ^2 因子说明，标量辐射对辐射能流造成 2PN 阶次的修正。

尽管标量辐射不会与张量辐射耦合而影响引力辐射的波形，但是它们所携带的能量却与引力辐射处在同样的量级，可以通过改变体系的辐射反作用而对波形产生影响。对这种效应的观测可以作为引力辐射系统中宇称破坏的检验。总的辐射能流是标量场与引力场的叠加， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T$ ，即

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{32}{5} \frac{v^2 x^5}{(1-e_r^2)^{7/2}} \left\{ \left(1 + \frac{73}{24} e_r^2 + \frac{37}{96} e_r^4 \right) \right. \\ & + \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{25}{24576} \Delta^2 + \frac{4}{3} \delta \varpi \right) + \left(\frac{475}{49152} \Delta^2 + \frac{449}{36} \delta \varpi \right) e_r^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{575}{65536} \Delta^2 + \frac{1195}{144} \delta \varpi \right) e_r^4 + \left(\frac{75}{131072} \Delta^2 + \frac{11}{48} \delta \varpi \right) e_r^6 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

4.4.2 角动量流

1. 引力辐射的角动量流

根据 Noether 定理的表述，设对于经典场的一个对称无穷小变换——平移、转动或推动形式为

$$\begin{aligned} x^\mu & \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^a A_a^\mu(x) \\ \phi(x) & \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \varepsilon^a F_a(\phi, \partial_\mu \phi) \end{aligned} \quad (4.72)$$

如果该变换使得 Lagrange 量不变或至多相差一个散度项，那么物理量

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} [A_a^\nu(x)(\partial_\nu \phi) - F_a] - A_a^\mu(x) \mathcal{L} \quad \text{和} \quad Q_a = \int d^3 \mathbf{x} j_a^0(t, \mathbf{x}), \quad (4.73)$$

分别守恒，即

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad \text{和} \quad \dot{Q}_a = 0. \quad (4.74)$$

j_a^μ 和 Q_a 分别称为该经典场的守恒流和守恒荷。例如平移变换对应了系统能量守恒，转动变换对应了角动量守恒。这为定义引力波角动量提供了依据。

仿照物质场能动张量的定义 (1.9)，可以写出 TT 规范下引力波的 Lagrange 量

$$\mathcal{L}_{\text{GW}} = -\frac{1}{64\pi} \left\langle \left(\partial_\alpha H_{ij}^{\text{TT}} \right) \left(\partial^\alpha H_{\text{TT}}^{ij} \right) \right\rangle. \quad (4.75)$$

施加三维空间的无穷小转动 $\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{R} \cdot \mathbf{x}$ ，其中 $\mathcal{R} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ ， \mathbf{I} 是三维单位矩阵， $\boldsymbol{\omega}$ 是无穷小参量。于是

$$x^i \rightarrow x^i + \omega^{jk} A_{jk}^i, \quad A_{jk}^i = \delta_j^i x_k - \delta_k^i x_j. \quad (4.76)$$

$$H_{ij}^{\text{TT}} \rightarrow H_{ij}^{\text{TT}} + \omega^{kl} F_{ij,kl}, \quad F_{ij,kl} = \delta_{ik} H_{jl}^{\text{TT}} - \delta_{il} H_{jk}^{\text{TT}} + \delta_{jk} H_{il}^{\text{TT}} - \delta_{jl} H_{ik}^{\text{TT}}, \quad (4.77)$$

从定义 (4.73) 得到对应转动变换的守恒荷是

$$\mathcal{L}_T^k = \frac{1}{32\pi} R^2 \int \langle \tau_T^k \rangle d\Omega, \quad \tau_T^k = \epsilon^{ijk} (2H_{il}^{\text{TT}} \dot{H}_{jl}^{\text{TT}} - \dot{H}_{lm}^{\text{TT}} x_i \partial_j H_{lm}^{\text{TT}}), \quad (4.78)$$

这就是 dCS 理论中引力波角动量的定义。其中涉及的体积分已经转化为球坐标下的积分。坐标 \mathbf{x} 是场点坐标，定义为 $\mathbf{x}/R = \hat{\mathbf{N}}$ 。而梯度算符 ∂_j 则表示为

$$\partial_j = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \iota \sin \omega & \frac{1}{R} \cos \iota \sin \omega & \frac{1}{R} \csc \iota \cos \omega \\ \sin \iota \cos \omega & \frac{1}{R} \cos \iota \cos \omega & -\frac{1}{R} \csc \iota \sin \omega \\ \cos \iota & -\frac{1}{R} \sin \iota & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial R \\ \partial/\partial \iota \\ \partial/\partial \omega \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

与广义相对论相似， τ_T^k 的表达式分为两项 (4.78)，其中第二项是引力波轨道角动量的体现。第一项没有经典意义下的解释，相当于引力波自旋对角动量的贡献。系数 2 表明传递引力的规范玻色子（引力子）的自旋为 2^[30]。

首先，流密度矢量 τ_T^k 的各个分量计算为

$$\begin{aligned} \tau_T^x &= 2 \cos \omega \left[(\partial_\iota H_+) \dot{H}_+ + (\partial_\iota H_\times) \dot{H}_\times \right] - 2 \cot \iota \sin \omega \left[(\partial_\omega H_+) \dot{H}_+ + (\partial_\omega H_\times) \dot{H}_\times \right], \\ \tau_T^y &= -2 \sin \omega \left[(\partial_\iota H_+) \dot{H}_+ + (\partial_\iota H_\times) \dot{H}_\times \right] - 2 \cot \iota \cos \omega \left[(\partial_\omega H_+) \dot{H}_+ + (\partial_\omega H_\times) \dot{H}_\times \right], \\ \tau_T^z &= 12 \left[\dot{H}_\times H_+ - \dot{H}_+ H_\times \right] + 2 \left[(\partial_\omega H_\times) \dot{H}_\times + (\partial_\omega H_+) \dot{H}_+ \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

其 x 和 y 分量同样正比于 $\cos \omega$ 和 $\sin \omega$ ，这导致了最终立体角积分为零，这是自旋平行和非进动假设的必然结果。于是角动量损失中的非零分量只有

$$\mathcal{L}_T^z = \frac{32}{5} \frac{m v^2 x^{7/2}}{(1 - e_r^2)^2} \left[\left(1 + \frac{7}{8} e_r^2 \right) + \delta \varpi \left(\frac{x}{1 - e_r^2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} e_r^2 + \frac{35}{48} e_r^4 \right) \right]. \quad (4.81)$$

其中第一项与广义相对论的结果完全一致。第二项是 dCS 修正引起的 2PN 修正。

2. 标量辐射的角动量流

标量辐射所携带的角动量也可以通过对标量场 Lagrange 量的转动分析得到，此处不再赘述。其表达式写为

$$\mathcal{L}_S^k = -\beta R^2 \int \langle \tau_S^k \rangle d\Omega, \quad \tau_S^k = -\epsilon_{ijk} \dot{\vartheta} x_i \partial_j \vartheta, \quad (4.82)$$

因为标量场对应自旋为 0 的 Boson，因此角动量中只有轨道角动量的贡献而没有自旋角动量的贡献。流密度矢量 τ_S^k 的三个分量分别化简为

$$\begin{aligned} \tau_S^x &= -\cot \iota \sin \omega (\partial_\omega \vartheta) \dot{\vartheta} + \cos \omega (\partial_\iota \vartheta) \dot{\vartheta}, \\ \tau_S^y &= -\sin \omega (\partial_\iota \vartheta) \dot{\vartheta} - \cot \iota \cos \omega (\partial_\omega \vartheta) \dot{\vartheta}, \\ \tau_S^z &= (\partial_\omega \vartheta) \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

立体角积分后得到的非零分量同样只有

$$\mathcal{L}_S^z = \frac{32}{5} \frac{mv^2 x^{7/2}}{(1-e_r^2)^2} \frac{25}{24576} \Delta^2 \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left(1 + 3e_r^2 + \frac{3}{8}e_r^4 \right). \quad (4.84)$$

得到 dCS 理论中标量辐射对角动量流的 2PN 修正。

因为角动量损失中只有 z 分量非零，不妨将它记做一个标量，总的角动量损失率表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_S^z + \mathcal{L}_T^z = & \frac{32}{5} \frac{mv^2 x^{7/2}}{(1-e_r^2)^2} \left\{ \left(1 + \frac{7}{8}e_r^2 \right) + \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{25}{24576} \Delta^2 + \frac{4}{3} \delta\varpi \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{25}{8192} \Delta^2 + \frac{16}{3} \delta\varpi \right) e_r^2 + \left(\frac{25}{65536} \Delta^2 + \frac{35}{48} \delta\varpi \right) e_r^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

一个特殊的情况是在 $e_r \rightarrow 0$ 时，角动量损失率和能量损失率之间满足 $\mathcal{F} = \Omega \mathcal{L}$ 。

4.4.3 轨道衰减

到此为止，我们得到了 dCS 引力下双黑洞系统在自旋平行情况下的运动和引力辐射。并给出了引力辐射所携带的能流 (4.71) 和角动量流 (4.85)，这些能量和角动量只能来自于系统的守恒能量和守恒角动量，这就导致了双星轨道，或轨道根数随着引力辐射而发生的长时标演化。

体系总能量和轨道角动量分别由方程 (4.14, 4.15) 给出。将“径向”偏心率和“径向”半长轴替换为时间的函数， $e_r = e_r(t)$ 和 $\xi = \xi(t)$ ，结合能量和角动量平衡方程

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{F}, \quad \frac{dL_z}{dt} = -\mathcal{L}. \quad (4.86)$$

可以反解出 $e_r'(t)$ 和 $x'(t)$ 。精确到 dCS 修正的一阶 $\mathcal{O}(\zeta)$ ，结果是

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} = & \frac{64}{5} \frac{vx^5}{(1-e_r^2)^{7/2}} \left\{ \left(1 + \frac{73}{24}e_r^2 + \frac{37}{96}e_r^4 \right) \right. \\ & + \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{25}{24576} \Delta^2 + \frac{10}{3} \delta\varpi \right) + \left(\frac{475}{49152} \Delta^2 + \frac{43}{3} \delta\varpi \right) e_r^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{575}{65536} \Delta^2 + \frac{133}{18} \delta\varpi \right) e_r^4 + \left(\frac{75}{131072} \Delta^2 + \frac{11}{48} \delta\varpi \right) e_r^6 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

和

$$\begin{aligned} m \frac{de_r}{dt} = & -\frac{304}{15} \frac{e_r vx^4}{(1-e_r^2)^{5/2}} \left\{ \left(1 + \frac{121}{304}e_r^2 \right) + \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left[\left(\frac{375}{155648} \Delta^2 + \frac{421}{114} \delta\varpi \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1125}{311296} \Delta^2 + \frac{907}{228} \delta\varpi \right) e_r^2 + \left(\frac{375}{1245184} \Delta^2 + \frac{143}{456} \delta\varpi \right) e_r^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

可以看到 $dx/dt > 0$ 和 $de_r/dt < 0$ ，表明在辐射衰减过程中轨道频率不断升高，而偏心率则不断减小，这一效应称为轨道圆化。

我们期待可以对辐射衰减方程 (4.87, 4.88) 解析求解。但为了应对它们的复杂形式，Yunes 等人^[141]引入了一个新的近似——小偏心率近似，即假定偏心率及其初始值 e_0 远远小于 1。将方程 (4.87, 4.88) 相除并精确到 ζ 的一阶，得到

$$\frac{dx}{de_r} = -\frac{12x}{19} \frac{1 + (73/24)e_r^2 + (37/96)e_r^4}{e_r(1 - e_r^2)[1 + (121/304)e_r^2]} \left\{ 1 - \frac{x^2}{1 - e_r^2} \frac{\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_2 e_r^2 + \mathcal{W}_4 e_r^4 + \mathcal{W}_6 e_r^6}{\left(1 + \frac{121}{304}e_r^2\right)\left(1 + \frac{73}{24}e_r^2 + \frac{37}{96}e_r^4\right)} \right\}, \quad (4.89)$$

多项式分式中涉及到的系数是

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \frac{325}{233472}\Delta^2 + \frac{41}{114}\delta\varpi, & \mathcal{W}_2 &= \frac{16925}{7471104}\Delta^2 - \frac{245}{2736}\delta\varpi, \\ \mathcal{W}_4 &= \frac{2325}{1245184}\Delta^2 + \frac{7151}{10944}\delta\varpi, & \mathcal{W}_6 &= \frac{2225}{19922944}\Delta^2 - \frac{649}{21888}\delta\varpi. \end{aligned} \quad (4.90)$$

方程 (4.89) 的解写为领头阶和扰动修正的叠加， $x(e_r) = x_0(e_r) + \zeta x_1(e_r)$ ，在初始条件 $x(e_r = e_0) = x_0$ 下，精确到 $\mathcal{O}(\zeta)$ 和 $\mathcal{O}(e_r^4)$ 阶次，我们得到偏心率以频率为函数的表达式

$$\begin{aligned} e_r(\chi) &= e_0 \chi^{-19/18} \left\{ 1 + \frac{3323}{1824} e_0^2 (1 - \chi^{-19/9}) \right. \\ &+ \frac{15994231}{6653952} e_0^4 \left(1 - \frac{66253974}{15994231} \chi^{-19/9} + \frac{50259743}{15994231} \chi^{-38/9} \right) \\ &+ \left(\frac{325}{294912} \Delta^2 + \frac{41}{144} \delta\varpi \right) (1 - \chi^{4/3}) \\ &+ \left[\left(-\frac{1079975}{179306496} \Delta^2 - \frac{136243}{87552} \delta\varpi \right) \chi^{-19/9} \right. \\ &+ \left(\frac{5633725}{1255145472} \Delta^2 + \frac{49807}{204288} \delta\varpi \right) \chi^{-7/9} \\ &+ \left(\frac{13338125}{3765436416} \Delta^2 + \frac{3366541}{1838592} \delta\varpi \right) \\ &+ \left. \left(-\frac{1079975}{537919488} \Delta^2 - \frac{136243}{262656} \delta\varpi \right) \chi^{4/3} \right] e_0^2 \\ &+ \left[\left(\frac{81672082375}{1962330292224} \Delta^2 + \frac{10303247315}{958169088} \delta\varpi \right) \chi^{-38/9} \right. \\ &+ \left(-\frac{5196368177125}{178572056592384} \Delta^2 - \frac{82850130257}{87193387008} \delta\varpi \right) \chi^{-26/9} \\ &+ \left(-\frac{10507242925}{254376148992} \Delta^2 - \frac{5841770863}{372621312} \delta\varpi \right) \chi^{-19/9} \\ &+ \left(\frac{18720868175}{763128446976} \Delta^2 + \frac{165508661}{124207104} \delta\varpi \right) \chi^{-7/9} \\ &+ \left(\frac{1232639443225}{178572056592384} \Delta^2 + \frac{455716402373}{87193387008} \delta\varpi \right) \\ &+ \left. \left(-\frac{5198125075}{1962330292224} \Delta^2 - \frac{655763471}{958169088} \delta\varpi \right) \chi^{4/3} \right] e_0^4 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

其中定义了由初始频率归一化的无量纲频率

$$\chi \equiv \frac{\Omega}{\Omega_0} = \left[\frac{x}{x_{(0)}} \right]^{3/2} \equiv \chi(e_r). \quad (4.92)$$

Ω_0 是轨道偏心率为初始值时的对应频率。方程 (4.91) 中的广义相对论部分已经由^[141]得到，而 dCS 修正部分则由^[100]首次给出。通过这种方法，给出了辐射反作用下偏心率的频域演化，这在之后计算 Fourier 波形时扮演了重要的角色。

从方程 (4.91)，在 OPN 和小偏心率展开的主导阶， $e_r/e_0 = (F/F_0)^{-19/18}$ ，其中 $F = \Omega/(2\pi)$ 和 F_0 是引力波频率及其初始值。由于轨道圆化效应，人们传统地认为偏心率在引力波探测当中不会占据主要地位。例如，设一个双星系统的初始偏心率 $e_0 \simeq 0.1$ ，初始频率为 $F_0 \simeq 20\text{Hz}$ ，当该双星频率演化到频率 $F \simeq 200\text{Hz}$ 时，其偏心率达到 $e_r \simeq 0.01$ 。在进入地面引力波探测器频段后，双星轨道偏心率会快速衰减到可以忽略的地步。但这不是绝对的。例如当初始偏心率为 $e_0 \simeq 0.4$ 时，引力波频率演化到 $F \simeq 10^3\text{Hz}$ 时，偏心率才能衰减到 $e_r \sim 0.01$ 。尤其是当双黑洞并合时间发生在密集的集群环境中时，例如发生在球状星团中或星系核附近时，在进入探测器频段时会带有不可忽略的残余偏心率。例如，Romero-Shaw 等人^[192]通过对引力波事件 GW190521 的分析，发现该系统在频率 10Hz 时，仍然以 90% 置信度具有 ≥ 0.11 的残余偏心率，相应的后验概率密度分布如图 (4.4) 所示。

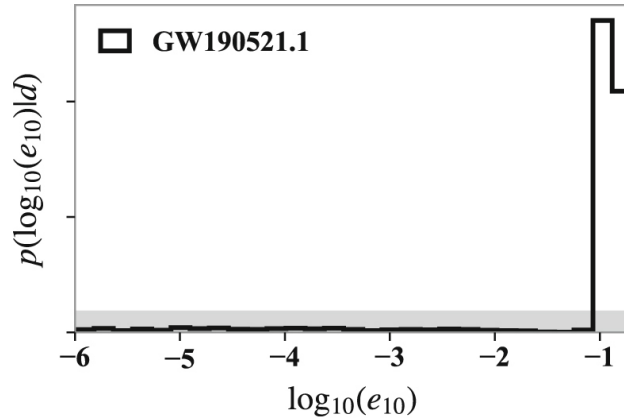


图 4.4 利用波形模板 SEOBNRE 分析引力波事件 GW190521 推测得到的频率 10Hz 时残余偏心率 e_{10} 的后验概率分布。在 90% 置信区间上， $e_{10} \geq 0.11$ 。该图引自^[192]。

4.5 小偏心率展开下的频域波形

由于大多数引力波数据分析工作都是在 Fourier 空间进行的，例如信噪比和似然函数的计算^[30]。因此除了时域波形外，对频域波形的解析和近似计算也是必须的。在本节中，我们首先在第 4.5.1 将时域波形表示为平近点角的函数。在第 4.5.2 节中，我们一般性地讨论如何计算高阶后牛顿修正下的频域波形。在第 4.5.3 节中，我们展示 dCS 引力下频域波形的具体结果。

4.5.1 波形作为平近点角的函数

目前我们已经将引力波形写为了真近点角的函数，但是，在计算 Fourier 波形之前，我们还需要处理另一问题——真近点角 V 随着时间的增长不是均匀的，这会给我们的 Fourier 波形计算带来极大困扰。因此我们将波形用平近点角重新表示。平近点角是根据 Kepler 方程 $\ell(u) \equiv \phi/K = u - e_t \sin u$ (4.21) 定义的，随着时间单调均匀增大。因此，在不考虑辐射反作用时， ℓ 可以表示轨道频率 $F = \Omega/(2\pi)$ 与时间相乘，即 $\ell = Ft(u)$ 。要想将偏近点角变换为平近点角，则需要对修正 Kepler 方程进行求解。历史上比较著名的一个解法是利用无穷 Bessel 级数表示的^[193-194]，即

$$u - \ell = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{s} J_s(se_t) \sin(s\ell), \quad (4.93)$$

$J_s(z)$ 是 s 阶一类 Bessel 函数^[195]。对固定 s 和小 e_t 值，Bessel 函数的渐近行为正比于 e_t^s ，因此高于四阶的展开项依据小偏心率展开被略去。于是从定义 (4.11) 变换到真近点角 V 的表达式，代入波形 (4.50, 4.51) 中，精确到 $\mathcal{O}(\zeta)$ 和 $\mathcal{O}(e_r^4)$ ，得到

$$\begin{aligned} \xi_+^{(0)} = x \left\{ \frac{1}{48} e_r \left[3(8 - e_r^2) \sin^2 \iota + 4(1 + \cos^2 \iota)(9 - 4e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(\ell) \right. \\ + \frac{1}{24} \left[e_r^2(12 - 4e_r^2) \sin^2 \iota - 3(1 + \cos^2 \iota)(8 - 20e_r^2 + 11e_r^4) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(2\ell) \\ + \frac{9}{32} e_r \left[2e_r^2 \sin^2 \iota - (1 + \cos^2 \iota)(8 - 19e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(3\ell) \\ + \frac{2}{3} e_r^2 \left[e_r^2 \sin^2 \iota - 3(1 + \cos^2 \iota)(2 - 5e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(4\ell) \\ - \frac{625}{96} (1 + \cos^2 \iota) e_r^3 \cos(2\beta\ell + 2\omega) \cos(5\ell) \\ - \frac{81}{8} (1 + \cos^2 \iota) e_r^4 \cos(2\beta\ell + 2\omega) \cos(6\ell) \\ - \frac{1}{48} (1 + \cos^2 \iota) e_r (36 - 23e_r^2) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(\ell) \\ + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \iota) (2 - 5e_r^2 + 3e_r^4) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(2\ell) \\ + \frac{9}{32} (1 + \cos^2 \iota) e_r (8 - 19e_r^2) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(3\ell) \\ + 2(1 + \cos^2 \iota) e_r^2 (2 - 5e_r^2) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(4\ell) \\ + \frac{625}{96} (1 + \cos^2 \iota) e_r^3 \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(5\ell) \\ \left. + \frac{81}{8} (1 + \cos^2 \iota) e_r^4 \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(6\ell) \right\}, \quad (4.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_{\times}^{(0)} = x & \left\{ \frac{1}{6} e_r (9 - 4e_r^2) \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(\ell) \right. \\
 & - \frac{1}{4} (8 - 20e_r^2 + 11e_r^4) \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(2\ell) \\
 & - \frac{9}{16} e_r (8 - 19e_r^2) \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(3\ell) \\
 & - 4e_r^2 (2 - 5e_r^2) \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(4\ell) \\
 & - \frac{625}{48} e_r^3 \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(5\ell) \\
 & - \frac{81}{4} e_r^4 \cos \iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(6\ell) \\
 & + \frac{1}{24} e_r (36 - 23e_r^2) \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(\ell) \\
 & - (2 - 5e_r^2 + 3e_r^4) \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(2\ell) \\
 & - \frac{9}{16} e_r (8 - 19e_r^2) \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(3\ell) \\
 & - 4e_r^2 (2 - 5e_r^2) \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(4\ell) \\
 & - \frac{625}{48} e_r^3 \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(5\ell) \\
 & \left. - \frac{81}{4} e_r^4 \cos \iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(6\ell) \right\}, \tag{4.95}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_+ = \delta\varpi x^3 & \left\{ \frac{1}{18} e_r \left[- (12 + 15e_r^2) \sin^2 \iota + (1 + \cos^2 \iota) (45 + 41e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(\ell) \right. \\
 & - \left[e_r^2 \left(1 + \frac{224}{288} e_r^2 \right) \sin^2 \iota + \frac{1}{96} (1 + \cos^2 \iota) (64 - 768e_r^2 - 575e_r^4) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(2\ell) \\
 & - \frac{3}{2} e_r \left[e_r^2 \sin^2 \iota + (1 + \cos^2 \iota) (3 - 10e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(3\ell) \\
 & - \frac{1}{9} e_r^2 \left[20e_r \sin^2 \iota + 3(1 + \cos^2 \iota) (35 - 83e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \right] \cos(4\ell) \\
 & - \frac{425}{18} (1 + \cos^2 \iota) e_r^3 \cos(2\beta\ell + 2\omega) \cos(5\ell) \\
 & - \frac{1365}{32} (1 + \cos^2 \iota) e_r^4 \cos(2\beta\ell + 2\omega) \cos(6\ell) \\
 & - \frac{1}{18} (1 + \cos^2 \iota) e_r (45 + 31e_r^2) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(\ell) \\
 & + \frac{1}{96} (1 + \cos^2 \iota) (64 - 768e_r^2 - 529e_r^4) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(2\ell) \\
 & + \frac{3}{2} (1 + \cos^2 \iota) (3 - 10e_r^2) e_r \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(3\ell) \\
 & + \frac{1}{3} (1 + \cos^2 \iota) e_r^2 (35 - 83e_r^2) \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(4\ell) \\
 & + \frac{425}{18} (1 + \cos^2 \iota) e_r^3 \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(5\ell) \\
 & \left. + \frac{1365}{32} (1 + \cos^2 \iota) e_r^4 \sin(2\beta\ell + 2\omega) \sin(6\ell) \right\}, \tag{4.96}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \delta\xi_x = & \delta\varpi x^3 \left\{ \frac{1}{9}e_r(45 + 41e_r^2) \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(\ell) \right. \\
 & - \frac{1}{48}(64 - 768e_r^2 - 575e_r^4) \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(2\ell) \\
 & - 3e_r(3 - 10e_r^2) \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(3\ell) \\
 & - \frac{2}{3}e_r^2(35 - 83e_r^2) \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(4\ell) \\
 & - \frac{425}{9}e_r^3 \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(5\ell) \\
 & - \frac{1365}{16}e_r^4 \cos\iota \sin(2\beta\ell + 2\omega) \cos(6\ell) \\
 & + \frac{1}{9}e_r(45 + 31e_r^2) \cos\iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(\ell) \\
 & - \frac{1}{48} \cos\iota(64 - 768e_r^2 - 529e_r^4) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(2\ell) \\
 & - 3e_r \cos\iota(3 - 10e_r^2) \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(3\ell) \\
 & - \frac{2}{3}e_r^2(35 - 83e_r^2) \cos\iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(4\ell) \\
 & - \frac{425}{9}e_r^3 \cos\iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(5\ell) \\
 & \left. - \frac{1365}{16}e_r^4 \cos\iota \cos(2\beta\ell + 2\omega) \sin(6\ell) \right\}. \tag{4.97}
 \end{aligned}$$

当上述引力波经过一个地球时，探测器将对引力波的不同极化模式产生响应，最终可探测的引力波信号写为 $H(t) = H_+F_+ + H_\times F_\times$ ，其中 F_+ 和 F_\times 是探测器对 + 模式和 \times 模式的响应函数^[30]，依赖于引力波相对探测器平面的夹角、方位角和引力波极化角。可探测信号 $H(t)$ 写为

$$\begin{aligned}
 H(t) = & \frac{2vm}{R} \sum_{n=0}^6 \left\{ \left[A_{SS}^{(n)}(x, e_r) \sin(n\ell) + A_{CS}^{(n)}(x, e_r) \cos n\ell \right] \sin(2\beta\ell) \right. \\
 & \left. + \left[A_{SC}^{(n)}(x, e_r) \sin(n\ell) + A_{CC}^{(n)}(x, e_r) \cos n\ell \right] \cos(2\beta\ell) + A_C^{(n)}(x, e_r) \cos n\ell \right\}, \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

$A_{SS}^{(n)}$ 、 $A_{CS}^{(n)}$ 、 $A_{SC}^{(n)}$ 、 $A_{CC}^{(n)}$ 和 $A_C^{(n)}$ 是一系列随轨道衰减而演化的系数，除了依赖于频率 x 和偏心率 e_r 外，也依赖于观测方位 $\{\iota, \omega\}$ 、响应函数 $F_{+, \times}$ 和 dCS 修正常数 $\delta\varpi$ 。采用指数形式可以将波形 (4.98) 改写为

$$H(t) = \frac{2vm}{R} \sum_{n=-6}^6 \sum_{k=\{0, \pm 2\}} A_{nk}(\xi, e) e^{-i(n+k\beta)\ell}, \tag{4.99}$$

其中振幅因子可以拆分为广义相对论部分和 dCS 修正部分，即 $A_{nk} = \bar{A}_{nk} + \delta A_{nk}$ ，由于它们只是方程 (4.94 - 4.97) 中相关系数的简单变换，因此这里不再详细列出。

4.5.2 频域波形：方法概述

在高阶后牛顿近似下计算偏心率轨道系统的频域波形相对复杂，原因主要包括：(1) 波形受到近心点进动带来的低频调制，(2) 波形只能表示平近点角的函数，而不是显含时间的函数，(3) 偏心率只能表示为频率的函数，而不是显含时间的函数。我们首先一般性地介绍这类系统频域波形的计算方法^[105,196-200]。

将可探测信号一般性地写为

$$H(t) = \frac{2vm}{R} \sum_{nk} A_{nk}(\xi, e_r) e^{-i(n+k\beta)\ell}, \quad \text{with} \quad \sum_{nk} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty}, \quad (4.100)$$

其中 n 是非负整数，代表了引力波辐射频率与轨道频率的可能比值， k 代表了波形受到进动率的调制。平近点角为 $\ell = Ft$ ，半长轴 ξ 和偏心率 e_r 都可以表示为频率 F 的函数。方程 (4.100) 的 Fourier 变换是

$$\tilde{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i2\pi ft} dt = \frac{2vm}{R} \sum_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} A_{nk}(F) e^{-i(n+k\beta)\ell} e^{i2\pi ft} dt, \quad (4.101)$$

上述被积积分中指数部分是按照频率 f 快速震荡的，但是振幅部分 $A_{nk}(F)$ 则仅仅随着辐射反作用缓慢演化。因此这一积分可以利用稳态相位近似进行计算^[30,105,168-169,201]，积分结果主要由稳态点附近的函数值所贡献，

$$\begin{aligned} \tilde{h}(f) &\simeq \frac{2vm}{R} \sum_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} A_{nk}(F) e^{i[2\pi ft - (n+k\beta)\ell]} dt \\ &= \frac{2vm}{R} \sum_{nk} A_{nk}(F_{nk}) \sqrt{\frac{2\pi}{\ddot{\psi}_{nk}}} \exp \left\{ i \left[2\pi f t_{nk} - (n + k\beta_{nk})\ell_{nk} - \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

其中

$$\ddot{\psi}_{nk} = (n + k\beta_{nk})\ddot{\ell}_{nk} + 2k\dot{\beta}_{nk}\dot{\ell}_{nk} + k\ddot{\beta}_{nk}\ell_{nk}. \quad (4.103)$$

下标 nk 是对稳态点的序号标记，带有下标 nk 的量表示对应物理量在稳态点 nk 处的取值。新的求和算符 \sum_{nk} 表示对所有包含稳态点的项的求和。稳态点由

$$f = (n + k\beta_{nk})F_{nk}, \quad (4.104)$$

确定。进动率 β 也是频率 F 的函数，同时又正比于 $\delta\varpi$ ，是 dCS 理论引起的修正，因此我们可以扰动地求解代数方程 (4.104)，得到

$$F_{nk} = F_{nk}(f) \simeq \frac{f}{n} \left[1 + \delta F_{nk}(f) \right]. \quad (4.105)$$

稳态点的 Newton 阶近似是 $F_{nk} = f/n$ ， δF_{nk} 是对应的 dCS 修正。在此基础上，我们可以给出与稳态点 F_{nk} 对应的其他物理量的值。例如，在包含辐射反作用时，平近点角 $\ell = Ft(u)$ 可以改写为

$$\ell(F) = 2\pi \int_0^t F dt = 2\pi \int_{F_0}^F (F/\dot{F}) dF = \ell_c + 2\pi \int (F/\dot{F}) dF, \quad (4.106)$$

其一阶和二阶导数分别由

$$\dot{\ell} = \dot{F} \frac{d\ell}{dF} = \dot{\ell}(F), \quad \text{和} \quad \ddot{\ell} = \ddot{F} \frac{d\ell}{dF} + \dot{F}^2 \frac{d^2\ell}{dF^2} \quad (4.107)$$

给出。其中涉及到的频率的时间导数 \dot{F} 和 \ddot{F} 由

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} \frac{de_r}{de_r}, \quad \text{和} \quad \ddot{F} = \dot{F} \frac{d\dot{F}}{dF}. \quad (4.108)$$

确定。从而将平近点角及其导数全部被表示为频率 F 的函数。对应于稳态点 F_{nk} 还有 $\ell_{nk} = \ell(F_{nk})$, $\dot{\ell}_{nk} = \dot{\ell}(F_{nk})$, $\ddot{\ell}_{nk} = \ddot{\ell}(F_{nk})$ 和进动率的时间导数

$$\dot{\beta} = \dot{F} \frac{d\beta}{dF} = \dot{\beta}(F), \quad \text{和} \quad \ddot{\beta} = \ddot{F} \frac{d\beta}{dF} + \dot{F}^2 \frac{d^2\beta}{dF^2}. \quad (4.109)$$

对应于稳态点有 $\beta_{nk} = \beta(F_{nk})$, $\dot{\beta}_{nk} = \dot{\beta}(F_{nk})$, $\ddot{\beta}_{nk} = \ddot{\beta}(F_{nk})$ 。最后，时间变量可以通过积分

$$t = \int_{F_0}^F \dot{F}^{-1} dF = t_c + \int \dot{F}^{-1} dF, \quad (4.110)$$

给出，对应稳态点有 $t_{nk} = t(F_{nk})$ 。将 t_{nk} , β_{nk} , ℓ_{nk} , $\ddot{\psi}_{nk}$ 等表达式代入方程 (4.103)，可以确定频域波形具有如下形式，

$$\tilde{H}(f) = \sum_{nk} \mathcal{A}_{nk}(f) e^{i\Psi_{nk}(f)}, \quad (4.111)$$

其中，修正后的振幅因子是

$$\mathcal{A}_{nk} = \frac{2\nu m}{R} \sqrt{2\pi} A_{nk}(F_{nk}) \ddot{\psi}_{nk}^{-1/2}, \quad (4.112)$$

相位因子是，

$$\Psi_{nk} = 2\pi f t_{nk} - (n + k\beta_{nk})\ell_{nk} - \frac{\pi}{4}. \quad (4.113)$$

于是我们完成了对高阶后牛顿近似下，偏心率轨道双星的频域引力波形计算方法的概述。

4.5.3 频域波形：结果

根据第 4.5.2 节中叙述的计算方法可以给出方程 (4.99) 所示波形的 Fourier 变换。方程 (4.99) 共包含 39 项，包括 $n \in \{-6, -5, \dots, 6\}$ 和 $k \in \{-2, 0, 2\}$ 。要使得稳态点存在，需要满足 $n > 0$, $k = \pm 2$ 或者 $n = 0, k = 2$ 。对于后者我们不予考虑，因为进动率 β 是一个远远小于 1 的常数，对应的相位 $\beta\ell$ 是一个非常低频的模式，这不符合稳态相位近似的原则。因此，存在稳态点的共 12 项。省略中间繁琐的计算细节后，最后的修正相位由方程 (4.113) 计算得到，

$$\begin{aligned}
 \Psi_{nk} = & -n\ell_c + 2\pi f t_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{256} \tilde{n} \tilde{u}_f^{-5} \left\{ 1 - \frac{2355}{1462} e_0^2 \chi_f^{-19/9} \right. \\
 & + e_0^4 \left(\frac{5222765}{998944} \chi_f^{-38/9} - \frac{2608555}{444448} \chi_f^{-19/9} \right) \left. \vphantom{\frac{3}{256}} \right\} \\
 & + \frac{3}{256} \tilde{n} \tilde{u}_f^{-5} \times \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[-\frac{125}{12288} + e_0^2 \left(-\frac{255125}{71860224} \chi_f^{-31/9} + \frac{220625}{33521664} \chi_f^{-19/9} \right) \right. \right. \\
 & + e_0^4 \left(\frac{1697398625}{73650143232} \chi_f^{-50/9} - \frac{43995625}{1608155136} \chi_f^{-38/9} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{8202445375}{458755670016} \chi_f^{-31/9} + \frac{733136875}{30571757568} \chi_f^{-19/9} \right) \right] \Delta^2 \\
 & + \left[\left(-\frac{100}{3} + \frac{8k}{3n} - \frac{256k}{3n} \chi_f^{5/3} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\
 & + e_0^2 \left(-\frac{32185}{35088} \chi_f^{-31/9} + \frac{126745}{16368} \chi_f^{-19/9} - \frac{241k}{102n} \chi_f^{-19/9} - \frac{512k}{3n} \chi_f^{-4/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \\
 & + e_0^4 \left(\frac{214133365}{35961984} \chi_f^{-50/9} + \left(-\frac{107411761}{6281856} + \frac{22659965k}{2465136n} \right) \chi_f^{-38/9} \right. \\
 & - \frac{1695694985}{224001792} \chi_f^{-31/9} + \left(\frac{421173635}{14927616} - \frac{800843k}{93024n} \right) \chi_f^{-19/9} \\
 & \left. \left. + \left(\frac{62560}{171} \chi_f^{-23/9} - \frac{106336}{171} \chi_f^{-4/9} \right) \frac{k}{n} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta \varpi \left. \vphantom{\frac{3}{256}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

其中

$$\tilde{u}_f \equiv (2\pi \mathcal{M} f/n)^{1/3}, \quad \chi_f \equiv (1/n)(f/F_0), \tag{4.115}$$

啾啾质量是

$$\mathcal{M} \equiv m v^{3/5}, \tag{4.116}$$

ℓ_c 是并合时刻平近点角的值。振幅及其修正 \mathcal{A}_{nk} 展示在补充材料 A.3 中。这些结果精确到耦合常数 ζ 的线性阶和偏心率的四阶。其中第一行为 Newton 阶的结果，已经由 Yunes 等人得到^[141]。但是这两个结果之间相差一个负号，因为我们这里的 Ψ_{nk} 对应了文献^[141]中方程 (4.29) 中的 $-i(\pi/4 + \Psi_n)$ 。我们可以再次看到 dCS 理论给自旋平行双黑洞系统的引力辐射带来 2PN 修正。同时由于近心点进动的存在，稳态相位法计算中涉及的相位的二阶导数应当由方程 (4.103) 代替，其中包含了平近点角 ℓ ，这也就是为什么修正相位中出现了若干与 ℓ_c 相关项的原因。

作为总结，我们重新说明在推导上述波形及修正相位时用到的四个主要近似，它们分别是

- 弱耦合近似： $\zeta \sim \alpha^2 / \mathcal{M}_s^4 \ll 1$,
- 慢转动近似： $\chi_A \ll 1$,
- 后牛顿近似： $m/r \ll 1$,
- 小偏心率近似： $e_0 \ll 1$ 。

其中弱耦合和慢转动近似的引入是为了保证对慢转动黑洞时空度规的解析求解^[89-90]， \mathcal{M}_s 是系统涉及的最小特征尺度。一方面要求 dCS 耦合常数 α 应小于

系统特征质量 \mathcal{M}_s 的平方，即 $\alpha/\mathcal{M}_s^2 \ll 1$ 。这就导致我们最终的波形模板存在一个对耦合常数和波源特征质量的适用区间。如果通过引力波观测得到 α 的约束上限超过接近甚至超过 \mathcal{M}_s^2 ，那么这个约束是没有物理意义的。在第4.6节中我们将看到，目前通过对引力波观测对 dCS 理论的约束全都属于这类无意义的情况^[95-97]。另一方面还要求黑洞的自旋很慢，即 $S_A \ll m_A^2$ 。这同样极大的限制了我们对 dCS 理论的约束能力。后牛顿近似的引入是为了微扰地、解析地描述双黑洞相互旋近过程，在双黑洞并合事件的早期，双黑洞间距较大，速度也远远低于光速，很好地保证了后牛顿近似的适用性。但是在并合瞬间前后和并合完成之后，引力辐射不再由后牛顿近似描述。因此对 dCS 理论的约束和对宇称破缺效应的检验只能基于波源旋近阶段的引力波信号。最后引入的是小偏心率近似，以保证对偏心率的频域演化和引力波的 Fourier 波形的解析求解。由于轨道圆化效应的存在，大部分双星系统在临近并合时轨道都已接近圆形。而且目前的观测也表明，即使像 GW190521 这样的系统，其残余偏心率也仅在 ~ 0.1 的量级^[192]。而我们的近似精确到 e_r 的四次幂，对于 $e_0 \lesssim 0.3$ 的情况完全适用。

4.6 基于引力波观测对宇称破缺的检验

4.6.1 圆轨道极限与后爱因斯坦参数

参数化后爱因斯坦 (parameterized post-Einsteinian, ppE) 参数是由 Yunes 和 Pretorius^[202]提出的，通过引入一般性参数描述引力波信号中非广义相对论效应的理论框架。最初只局限于张量极化、准圆轨道和主导阶后牛顿修正。此后由 Chatziioannou 等人^[203]推广到所有可能极化模式，由 Sampson 等人^[204]推广到准圆轨道的高阶后牛顿情形，由 Loutrel 等人^[205]推广到 OPN 的偏心率轨道。在圆轨道情形下，该参数化方案可以写为

$$\tilde{H}(f) = \tilde{h}(f) [1 + \alpha_{\text{ppE}} u^{a_{\text{ppE}}}] \exp [i\beta_{\text{ppE}} u^{b_{\text{ppE}}}] . \quad (4.117)$$

其中 u 定义为无量纲频率 $u \equiv (\pi \mathcal{M} f)^{1/3}$ ，参数 a_{ppE} 和 b_{ppE} 代表了广义相对论的修正阶次。参数 α_{ppE} 和 β_{ppE} 分别代表了振幅和相位修正的大小。在圆轨道极限下，在精确到 dCS 主导阶的情况下，可以得到 ppE 参数为

$$a_{\text{ppE}} = 4, \quad b_{\text{ppE}} = -1, \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{ppE}} &= -v^{-4/5} \left(\frac{25}{49152} \Delta^2 + \frac{29}{15} \delta \varpi \right) \\ &= \frac{\zeta}{v^{4/5}} \left[-\frac{13895}{24576} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 + \frac{558709}{1720320} \left(\frac{m^2}{m_1^2} \chi_1^2 + \frac{m^2}{m_2^2} \chi_2^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.119a)$$

$$\begin{aligned}\beta_{\text{ppE}} &= -v^{-4/5} \left(\frac{125}{524288} \Delta^2 - \frac{25}{32} \delta\varpi \right) \\ &= \frac{\zeta}{v^{4/5}} \left[-\frac{59875}{262144} \frac{\chi_1 \chi_2}{v} + \frac{481525}{3670016} \left(\frac{m^2}{m_1^2} \chi_1^2 + \frac{m^2}{m_2^2} \chi_2^2 \right) \right].\end{aligned}\quad (4.119\text{b})$$

上述结果与 Tahura & Yagi^[206] 所给一致。

4.6.2 LIGO/Virgo/KAGRA 引力波观测

目前 LIGO/Virgo/KAGRA 引力波探测阵列已经探测到超过 90 例来自致密双星系统的引力波信号^[47]，其中包含了对广义相对论可能的偏离。从引力波信号中提取物理信息的一种典型方法是 Bayes 推断。这一理论框架建立在 Bayes 定理

$$p(\boldsymbol{\theta}|d) = \frac{p(d|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(d)} \quad (4.120)$$

之上。其中 d 是来自探测器阵列的数据， $\boldsymbol{\theta}$ 是参数构成的矢量，它们唯一地确定理论波形。在广义相对论中，准圆轨道双黑洞系统的参数集合包括：波源的赤经和赤纬、引力波极化角、双黑洞轨道平面相对于视线方向倾角、啁啾质量、对称质量比、并合时间、光度距离、双黑洞各自的自旋等。在 Bayes 定理 (4.120) 中， $p(d|\boldsymbol{\theta})$ 称为似然函数，描述了对于一组给定参数 $\boldsymbol{\theta}$ 得到观测数据 d 的概率，定义为

$$\ln p(d|\boldsymbol{\theta}) \propto -\frac{1}{2} \sum_i \langle d_i - H(\boldsymbol{\theta}) | d_i - H(\boldsymbol{\theta}) \rangle, \quad (4.121)$$

d_i 是第 i 个探测器得到的引力波信号，其中既包含了物理信号也包含了环境噪声， $H(\boldsymbol{\theta})$ 代表了波形模板。噪声加权的内积定义为

$$\langle d_1 | d_2 \rangle \equiv 4\text{Re} \left[\int_{f_{\text{low}}}^{f_{\text{high}}} \frac{d_1 d_2^*}{S(f)} df \right] \quad (4.122)$$

* 代表了复共轭运算， $S(f)$ 是探测器的功率谱密度。 $p(\boldsymbol{\theta}|d)$ 称为后验分布，描述了从数据 d 中推断得到的各个参数的概率密度分布。 $p(\boldsymbol{\theta})$ 称为先验，代表了数据分析前我们对参数已有的认知。最后

$$p(d) = \int p(d|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \quad (4.123)$$

是 Bayes 证据，代表了得到数据 d 的总概率，并扮演归一化因子的角色。

为了对 dCS 引力施加限制，还应当将耦合参数 $\sqrt{\alpha}$ 考虑在内。因此方程 (4.120, 4.121, 4.123) 应当扩展为

$$p(\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}|d) = \frac{p(d|\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta})p(\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta})}{p(d)}, \quad (4.124)$$

$$\ln p(d|\boldsymbol{\theta}) \propto -\frac{1}{2} \sum_i \langle d_i - H(\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) | d_i - H(\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \rangle, \quad (4.125)$$

$$p(d) = \int p(d|\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) p(\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} d\sqrt{\alpha}, \quad (4.126)$$

我们关心的是 dCS 耦合常数 $\sqrt{\alpha}$ 的边际后验概率分布，定义为对其他系统参数的积分

$$p(\sqrt{\alpha}|d) = \frac{p(\sqrt{\alpha})}{p(d)} \int p(d|\sqrt{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}, \quad (4.127)$$

文献^[95]对引力波暂现源列表 (Gravitational-Wave Transient Catalog, GWTC-1) 中的引力波事件 GW151226 和 GW170608 进行了前述 Bayes 推断，其中广义相对论的波形模板由 IMRPhenomPv2 构建，dCS 修正部分由 ppE 参数 (4.118, 4.119) 给出。参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率密度分布如图 (4.5) 所示。由于 ppE 参数建立在弱耦合展开的基础上，因此对给定质量的引力波源，方程 (4.118, 4.119) 都仅对 $\sqrt{\alpha} \ll \mathcal{M}_s$ 适用，其中 \mathcal{M}_s 是系统涉及的最小特征质量^①。对事件 GW151226 和 GW170608^②，阈值 \mathcal{M}_s 标记为竖直实线。可以看到后验概率密度的峰值居于阈值右侧，表明 Bayes 推断给出的估计值处于波形模板的适用范围之外，这样的约束是没有物理意义的。

此外，文献^[96]从 GWTC-1 和 GWTC-2 中选出六个最有希望约束 dCS 理论的引力波事件——GW151226、GW170608、GW190924、GW190720、GW190707、GW190728。图 (4.6) 展示了这六个引力波事件给出的对 $\sqrt{\alpha}$ 的概率密度分布函数。图中竖直的实线代表了 90% 置信度取值，竖直虚线代表了波形模板的 \mathcal{M}_s 。我们同样得到了约束结果超出适用范围的情况，无法形成对 dCS 理论的有效约束。类似的情形同样出现在 Wang 等人^[97]对引力波事件 GW190814 和 GW190412 的分析中。图 4.7 中的斜虚线代表 \mathcal{M}_s ，而 $\sqrt{\alpha}$ 的 Bayes 推断值及其 90% 置信区间均位于斜线上方，同样意味着该约束是无意义的。上述观测约束结果正是本文的主要动机之一。原则上，更加精确的波形模板构建可以使得参数估计更加精确。本文旨在通过更加精确的双星动力学建模和波形模板构建，为更好地约束 dCS 引力提供理论基础。例如本章发展了一般的带有偏心率的自旋平行双星系统波形，在下一章，我们将进一步考虑自旋进动对波形的影响。但是具体的约束结果需要在全面完成波形构建和 Bayes 分析后得到。这将是未来研究工作的主要方向。

^①因为天体系统中的每个组分的解都仅在弱耦合极限下适用，所以 $\sqrt{\alpha}$ 需要小于系统涉及的所以特征质量的最小值，而不是整体的特征质量。

^②Nair 等人^[95]通过 Fisher 信息矩阵对各个事件的约束能力做出了估计，GW151226 和 GW170608 是约束最强的两个事件

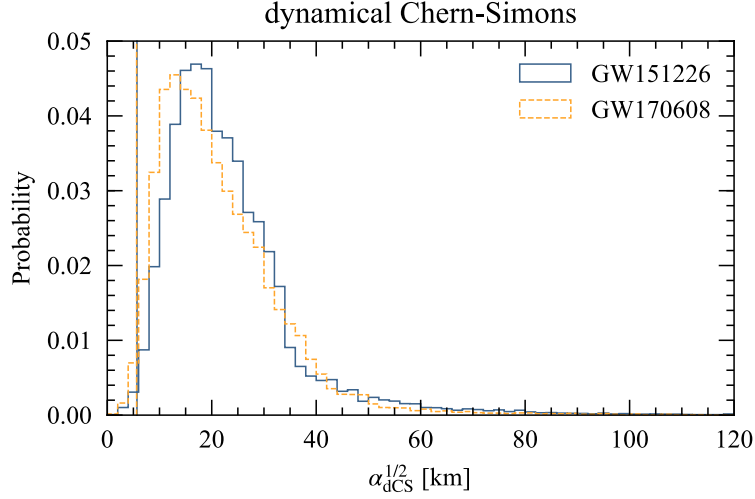


图 4.5 通过 Bayes 推断，由引力波事件 GW151226 和 GW170608 给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率分布，该图引自^[95]。其中竖直线表示了波形模板的适用上限 \mathcal{M}_s 。横轴标记 $\alpha_{\text{dcs}}^{1/2}$ 与本文的 α 含义相同。

4.6.3 未来引力波探测器对 dCS 理论的约束能力

由于 dCS 理论对引力波形的修正出现在 2PN 阶次，且建立在弱耦合近似的基础之上，因此当前的引力波观测无法对 dCS 理论形成有效的约束。那么未来第三代引力波探测器能否克服这一困难呢？Shi 等人^[98]采用 Fisher 信息矩阵的方法，研究了天琴、LISA 和 ET 等探测器对 dCS 理论的检验能力。Fisher 信息矩阵是一种在没有真实观测数据情况下计算探测器参数估计能力的方法，在参数空间 $\bar{\theta} \equiv \{\alpha^2, \theta\}$ 中，波形模板记做 $H(\bar{\theta})$ ，Fisher 信息矩阵定义为

$$F_{ij} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \bar{\theta}_i} \middle| \frac{\partial H}{\partial \bar{\theta}_j} \right\rangle, \quad (4.128)$$

其中内积 $\langle d_1 | d_2 \rangle$ 定义为 (4.122)。对参数 θ'_i 的估计不确定度是

$$\Delta \bar{\theta}_i = \sqrt{(F^{-1})^{ii}}, \quad (4.129)$$

特别地，对 α^2 的不确定度是 $\Delta \alpha^2$ 。这里仅考虑自旋平行准圆轨道双星的引力辐射，引力波形由 (4.117) 给出，广义相对论部分则由模板 IMRPhenomD 生成。不同探测器得到的不确定度展示在表 (4.1) 中。包含了

- 恒星级质量双黑洞系统 ($m = 70 M_\odot, q = 2, D_L = 200 \text{Mpc}$);
- 中等质量双黑洞系统 ($m = 2 \times 10^3 M_\odot, q = 2, D_L = 2 \text{Gpc}$);
- 大质量双黑洞系统 ($m = 2 \times 10^6 M_\odot, q = 2, D_L = 15 \text{Gpc}$);
- 中等质量比旋近系统 ($m = 2 \times 10^5 M_\odot, q = 2 \times 10^2, D_L = 1 \text{Gpc}$);
- 极端质量比旋近系统 ($m = 2 \times 10^5 M_\odot, q = 2 \times 10^4, D_L = 1 \text{Gpc}$)。

其中 m 为计算中使用的系统总质量， q 为天体质量比， D_L 是天体的光度距离。对所有探测器都得到了 $\Delta \alpha^2 > \mathcal{M}_s^2$ ，这表明未来的第三代引力波探测器也无法对

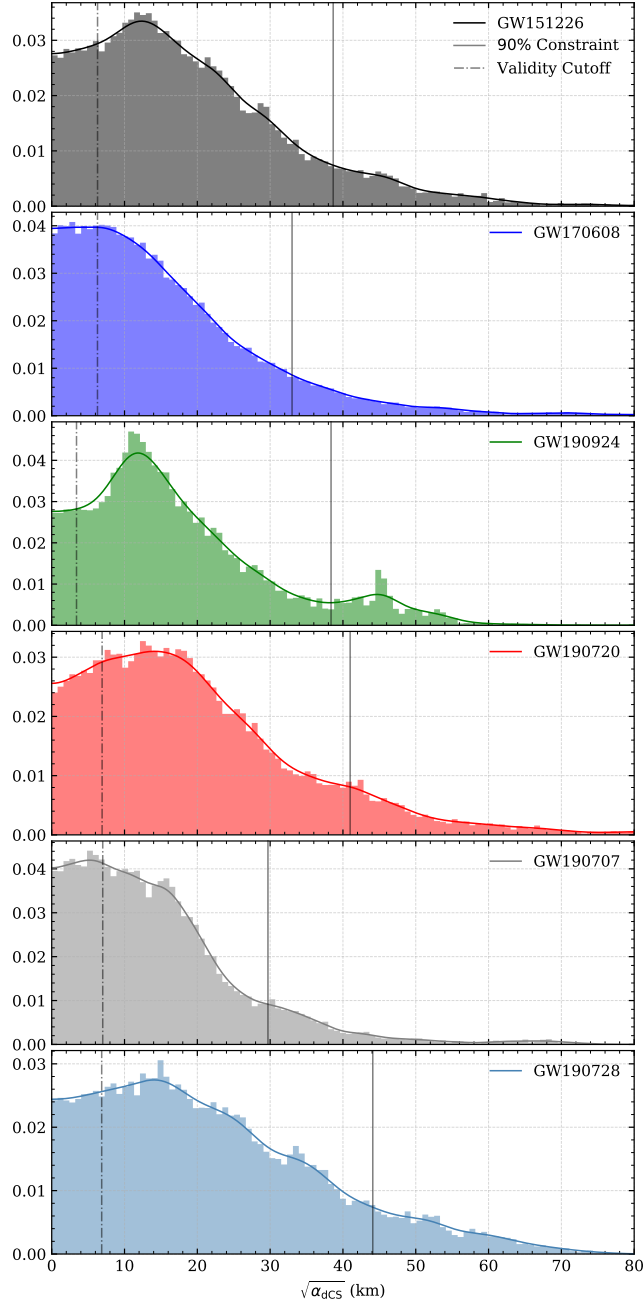


图 4.6 从六个引力波事件分别给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率密度分布。该图引自^[96]。横轴中的 α_{dCS} 与本文的 α 含义相同。

dCS 理论形成有效的约束。

4.6.4 偏心率对引力波观测约束的影响

与 Brans-Dicke 理论和 Einstein-dilaton-Gauss-Bonnet 理论相似，考虑双星系系统偏心率更有助于区分修改引力和广义相对论^[207]。为展示这一结论，我们数值计算 dCS 波形与广义相对论波形的情形不匹配度 (Mismatch)，定义为^[208-209]

$$\text{Mismatch} \equiv 1 - \frac{\langle h_1 | h_2 \rangle}{\sqrt{\langle h_1 | h_1 \rangle \langle h_2 | h_2 \rangle}}, \quad (4.130)$$

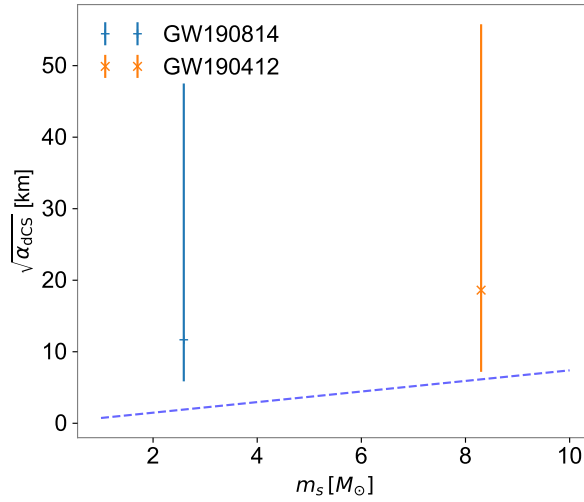


图 4.7 从引力波事件 GW190814 和 GW190412 给出的参数 $\sqrt{\alpha}$ 的后验概率密度分布。该图引自^[97]。横轴代表了双星系统中最小的特征质量，其中 m_s 与本文的 \mathcal{M}_s 含义相同。图中的两点代表从引力波数据对 $\sqrt{\alpha}$ 的推断值和 90% 误差棒。

表 4.1 天琴、ET 和 LISA 对 dCS 理论的约束能力。表格第一列列出了不同的波源类型，在正文中我们介绍了不同类型波源的总质量、质量比和光度距离。表格第二列给出了不同类型波源对应波形适用上限，以 \mathcal{M}_s^2 形式给出。后面三列依次给出了 Fisher 矩阵得到的不同探测器对不同类型波源的约束能力 $\Delta\alpha^2$ 。

波源类型	\mathcal{M}_s^2	天琴	LISA	ET
恒星质量双黑洞 [km^{-4}]	1.4×10^4	8.6×10^6	2.7×10^7	9.2×10^4
中等质量双黑洞 [km^{-4}]	9.4×10^9	7.8×10^{12}	1.2×10^{13}	...
大质量双黑洞 [km^{-4}]	9.4×10^{21}	1.6×10^{24}	4.2×10^{23}	...
中等质量比旋近系统 [km^{-4}]	9.4×10^9	5.9×10^{13}	2.4×10^{13}	...
极端质量比旋近系统 [km^{-4}]	9.4×10^5	6.4×10^9	3.0×10^9	...

在本文中，我们取 h_1 为广义相对论下带有偏心率的频域引力波形， h_2 是不同 ζ 取值下对应的 dCS 波形。我们考虑 LIGO 探测器，和一个与 GW190521 类似的引力波源，该波源产生的辐射可以被 LIGO 探测器接收^[45]。双黑洞质量分别为 $m_1 = 98.4M_\odot$ 和 $m_2 = 57.2M_\odot$ ，双黑洞的无量纲自旋分别设为 $\chi_1 = 0.15$ 和 $\chi_2 = 0.18$ ，探测器相对波源参考系的极角和方位角分别是 30° 和 35° ，波源在天空中的位置相对探测器参考系的极角和方位角分别是 40° 和 50° 。不匹配度的结果展示在图 (4.8)，在更高偏心率双星中不匹配度被放大，这提高了 dCS 理论与广义相对论的可区分性。

一般地，当不匹配度小于 $\chi_k^2(1-p)/2\rho^2$ 时，两个波形可以认为是可区分的^[210]，其中 $\chi_k^2(1-p)$ 从 χ^2 分布的累积分布函数计算得到，其中 k 代表了 χ^2 分布的自由度数量， p 取为 90% 置信度时对应的概率值。 ρ 代表了引力波信号的信噪比。对自旋平行的带有偏心率的的双黑洞系统自由度 $k = 5$ ，GW190521 的信噪比为 14.3^①，

^①<https://gwosc.org/projects/>

不匹配度判据约化为 $\text{Mismatch} \leq 4.62/\rho^2$ ，于是当不匹配度达到 0.0226 时 dCS 修正可以从广义相对论中区分出来。从图 (4.8) 中可知，当无量纲耦合常数 $\zeta = 0.20$ 时对应初始偏心率 $e_0 \approx 0.25$ 。该数值结果支持了我们“考虑双黑洞系统偏心率有助于区分 dCS 理论与广义相对论”的结论。但是到目前为止，尚未有较大偏心率的双黑洞系统被发现。目前倾向于有较大偏心率的引力波信号来自 GW190521。在 90% 置信区间上，对应引力频率为 10Hz 时的偏心率 $e_{10} \geq 0.11$ ^[192] [参见图 (4.4)]。因此仅考虑偏心率还不足以从现有引力波观测数据中实现对宇称对称性的有力检验，

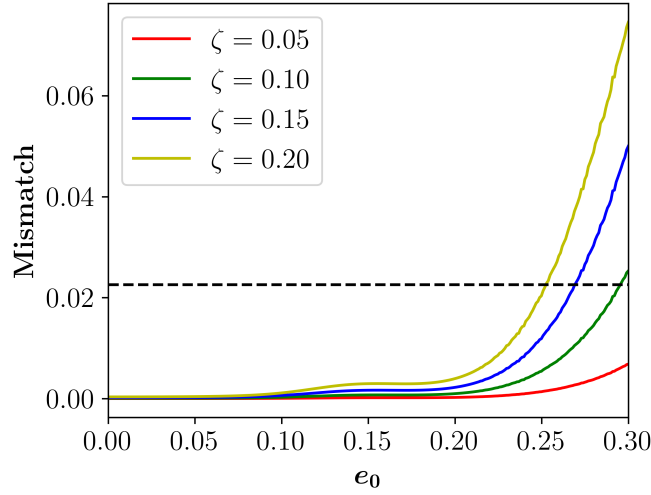


图 4.8 对不同耦合参数 ζ 和不同初始偏心率 e_0 ，dCS 波形与广义相对论波形之间的不确定度。水平虚线代表两个波形可区分的不确定度阈值 $\text{Mismatch} \approx 0.0226$ 。该图引自^[100]。

4.6.5 多信使观测与目前 dCS 引力的最紧约束

我们在本节穿插一个额外的对 dCS 理论的限制结果。尽管这一观测本身偏离了本文关注的目标，但是作为目前 dCS 理论——也就是引力宇称对称性的最强检验，这一结果无疑是振奋人心的。

从前面几节可以看到，无论是太阳系观测、脉冲双星观测还是引力波观测，都无法对 dCS 理论给出有效的约束。同时注意到，强场范围内约束的效果显著好于弱场约束。如果可以较好地测量中子星的物理特性，就有望对 dCS 理论给出更好的约束。Silva 等人^[211]结合孤立脉冲星观测和双中子星并合引力波观测，给出了对 dCS 理论的最紧约束。本小节主要介绍这一研究。

该约束建立在两个重要的关系上—— C -关系和 I -Love 关系。前者描述了中子星的致密度 $C = m_\star/r_\star$ (m_\star 和 r_\star 分别是中子星的质量和半径) 与转动惯量 \bar{I} 、转动四极矩 \bar{Q} 、第二潮汐 Love 数 $\bar{\lambda}$ ^① 之间的关系。后者描述了 \bar{I} 与 $\bar{\lambda}$ 之间的关系。Silva 等人^[211]采用 46 种不同的物态方程求解中子星结构方程，发现这两个

^① \bar{I} 、 \bar{Q} 和 $\bar{\lambda}$ 都已经进行了无量纲化处理

关系对物态方程不敏感，而只取决于引力理论。这两个关系展示在图 (4.9) 中。I-Love 关系在广义相对论中可以参数化为^[212-213]

$$\bar{I}_{\text{GR}} = \bar{\lambda}^{2/5}(c_0 + c_1 \bar{\lambda}^{-1/5} + c_2 \bar{\lambda}^{-2/5}), \quad (4.131)$$

在千分之一误差范围内, $c_0 = 0.584, c_1 = 0.980, c_2 = 2.695$ 。在 dCS 引力中, I-Love 关系的偏离可以参数化为

$$\bar{I} = \bar{I}_{\text{GR}} + 6.15 \times 10^{-2} \zeta \bar{\lambda}^{-4/5}. \quad (4.132)$$

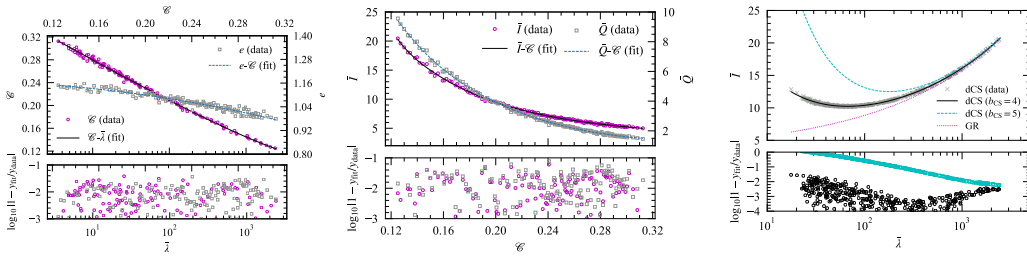


图 4.9 C 关系和 I-Love 关系。该图引自^[211]的 Supplemental Material。

LIGO/Virgo 对双中子星并合引力波事件 GW170817 的成功观测提供了一种测量中子星潮汐形变的新方法。观测数据给出，双星系统中一个质量为 $1.4M_{\odot}$ 的中子星的潮汐 Love 数约为 $\bar{\lambda}_{1.4} = 190_{-120}^{+390}$ ^[43,49]。然而引力波观测却无法给出对转动惯量 \bar{I} 的有效测量，也就阻碍了我们从 I-Love 关系约束引力理论。

一个可行的解决方案是通过 C-关系估计中子星的转动惯量，而这依赖于对中子星质量和半径的同时测量。一个可用的结果来自中子星内部组成探测器 (Neutron Star Interior Composition Explorer, NICER) 对 PSR J0030+0451 的观测^[214-215]。NICER 是 NASA 于 2017 年发射的一台搭载在国际空间站上的 X 射线天文仪器。它主要观测中子星表面的 X 射线辐射，通过对其能谱、脉冲轮廓和引力红移效应的建模，可以推断中子星质量、半径、物态方程、磁场强度、表面温度等信息^[216]。致密度 C 的后验概率密度分布 $p(C|\text{NICER})$ 如图 (4.10) 所示，于是可以推断质量 $1.4M_{\odot}$ 的中子星的致密度在 90% 置信度上位 $C_{1.4} = 0.159_{-0.022}^{+0.025}$ ，从 C-关系推断得到 $\bar{I}_{1.4} = 14.6_{-3.3}^{+4.5}$ ，中子星半径估计为 $r_{\star} = 13 \text{ km}$ 。于是可以得到 $6.15 \times 10^{-2} \zeta \leq 8.84 \times 10^2$ ，从而给出 $\zeta \lesssim 1.4 \times 10^4$ ，对应地

$$\sqrt{\alpha} \leq 8.5 \text{ km}, \quad (4.133)$$

该低于太阳系卫星观测约束约七个数量级，低于脉冲双星观测约三个数量级，低于引力波观测约束约一到两个数量级，是目前对于 dCS 理论的最紧约束。同时，对于孤立中子星，弱耦合近似需要修改为^[217]

$$\zeta \equiv 16\pi \frac{\alpha^2}{\beta R^4} \ll 1, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{m_{\star}}{r_{\star}^3} \right)^{-1/2}. \quad (4.134)$$

将中子星测量数据 $\{m_{\star} = 1.4M_{\odot}, r_{\star} = 13 \text{ km}\}$ 和方程 (4.133) 代入, 得到 $\zeta \lesssim 0.23$, 大致符合弱耦合近似的要求。

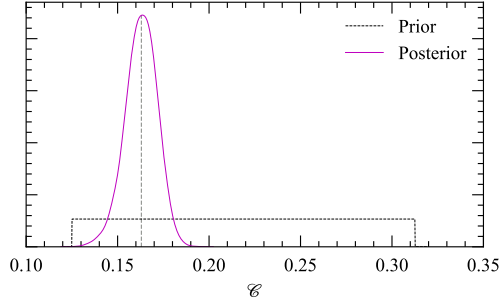


图 4.10 孤立脉冲星 PSR J0030+0451 致密度的后验概率密度分布。该图引自^[211]的 Supplemental Material。

尽管 Silva 等人给出的引力宇称破缺的约束令人振奋, 但是所采用的方法仍然是十分受限的。例如对中子星半径的测量是一个极其困难的问题, 至今为止只有 2-3 颗中子星的半径得到了较为精确的测量。因此通过增大观测样本进一步改进约束是非常有挑战性的。通过引力波观测对中子星潮汐形变度的测量还有很大的不确定度。这些事实仍然要求我们继续寻找新方法实现对引力宇称对称性的检验。

4.7 本章小结

本章深入且完整地探讨了自旋平行双黑洞系统的运动和引力辐射。我们采用准开普勒参数化方案求解运动方程, 最终结果 (4.10, 4.20, 4.21) 展示出了后牛顿近似下轨道运动的双周期结构——在一个时间周期内双星转过的角度超过一个方位角周期, 从而导致额外的近心点进动效应。在完成对双黑洞运动的讨论后, 我们首先讨论了 dCS 引力中引力辐射的极化模式, 最终从第 4.2 节中证明 dCS 修正不会产生额外的引力波极化, 这是由标量场与引力场的耦合形式决定的。借助准开普勒参数化解, 我们构建了自旋平行双黑洞系统在做一般平面轨道运动时的引力波形 [见方程 (4.50, 4.51)]。基于守恒部分的引力波形, 可以流程化地计算引力波带走的能量和角动量。在 dCS 引力下, 我们首先证明了只有修正后的引力场对引力波能动张量产生贡献, 而标量-引力场耦合不产生贡献 [见 (4.62)]。然后, 我们从方程 (4.63, 4.78) 出发给出了双星系统的能量和角动量损失率 (4.71, 4.85)。守恒部分引力波形、能量损失率和角动量损失率共同构成了 dCS 引力下双黑洞系统的完整动力学。在当前的引力波观测中, 第二代地面探测器仅对并合时刻前后很短时标内的引力波信号敏感, 因此我们在模板构建过程中忽略了宇宙学演化 (均匀的背景标量场的演化) 对双黑洞运动的影响。因此在远场区域产

生的引力波不会出现振幅双折射效应，在极化层面上无法展示宇称对称性的破坏。但是标量场的存在会加速双星并合，从而使我们可以在具体的波形上找到宇称破缺的证据。为适应引力波探测和参数估计的需要，我们还通过稳态相位法计算了对应的频域波形。具体结果展示在方程 (4.114) 和补充材料 (A.3) 中。只要将这些结果与广义相对论波形结合，就可以直接用于引力波的信号提取和参数估计，从而对引力的宇称破缺效应进行限制和检验。

在最后一节中我们简要介绍了目前基于引力波观测对引力宇称破缺效应的检验。与太阳系和脉冲双星观测相比，引力波观测的约束能力大幅提升。但是，如果采用圆轨道双黑洞系统的引力波形模板。无论是对现有引力波数据的分析，还是对未来引力波探测器分辨能力的估计，都无法给出符合弱耦合极限的约束值。通过不匹配度的分析，我们发现考虑了轨道偏心率影响后，引力波观测的约束能力将进一步提升，但是仍然难以对 dCS 理论给出有效约束。最后，我们简要介绍了 Silva 等人基于多信使观测给出的目前最强的约束， $\sqrt{a} \leq 8.5\text{km}$ 。但是中子星半径和潮汐形变度测量的困难仍然制约着我们对引力宇称对称性更高精度的检验。

第 5 章 dCS 引力下的双黑洞系统：自旋进动情形

在上一章中，我们详细研究了自旋平行双黑洞系统的运动和引力辐射。显然地，自旋平行是一个非常强的假设——严格自旋平行的系统是不存在的，而且也没有明确的天体物理机制表明双黑洞系统的自旋趋向于相互平行。相反，已经有相当的观测证据表明了自旋进动的存在。Cui 等人^[218]报告的 M87 星系的喷流方向以 11 年为周期的摆动，这是由于 M87 星系中心超大质量黑洞的自旋方向与喷流方向不平行而导致的 Lense-Thirring 进动效应。图 (5.1) 展示了 M87 星系喷流的结构演化。此外，Hannam 等人^[210]利用波形模板 NRSur7dq4 对引力波事件 GW200129 的分析表明，该引力波源中的较大质量黑洞倾向于高自旋，且自旋方向与轨道平面接近平行。图 (5.2) 展示了较大质量黑洞自旋大小 (标记为 χ_1) 和方向 (标记为自旋角动量与轨道角动量的夹角 κ_1) 的后验概率密度分布。

自旋进动系统的存在启发我们可以将相关效应纳入对 dCS 引力下双黑洞波源的建模。Chatziioannou 等人^[166]基于多尺度分析解析求解了圆轨道下的进动方程 (3.38)，Loutrel 等人^[106-107]将其推广到 dCS 引力中。并且给出估计：对于接近等质量和高自旋的系统，当耦合常数 $\sqrt{\alpha} \sim 1\text{km}$ 时，Fourier 波形与广义相对论波形在振幅上相差约 1%，在相位上相差约 10 弧度。这是第一次在修改引力下给出进动双星的引力波形，有很大潜力增强我们检验和约束引力宇称破缺效应的能力。

对上述研究的一个自然推广是将轨道偏心率和自旋进动融合起来，本章将关注 dCS 引力中自旋进动对双星轨道运动的影响，并研究相应的引力辐射。在第 5.1 节，我们介绍自旋进动双星系统的几何描述，其中包括了对不同参考系的介绍，对双星运动的描述和多尺度分析的基本思想。在第 5.2 节，我们引入平均化轨道角动量作为新的守恒量。在第 5.3 节，我们仿照 Klein 等人^[104-105]给出轨道运动的准开普勒参数化方案。在第 5.4 节，我们给出进动双星系统的标量辐射和引力波形，但不包含辐射反作用。在第 5.5 节中，我们计算了辐射能流和角动量流，以及频率的偏心率的辐射演化。由于标量单极辐射的存在，零偏心率轨道在 dCS 理论下不再是双星辐射衰减的最终稳定态。

5.1 自旋进动系统的几何描述

5.1.1 基本系、轨道系和共进动基本系

当双黑洞自旋角动量指向任意方向时，轨道角动量和自旋角动量均不再保持守恒，而呈现出进动效应。轨道角动量方向的变化意味着，对惯性系中的观测

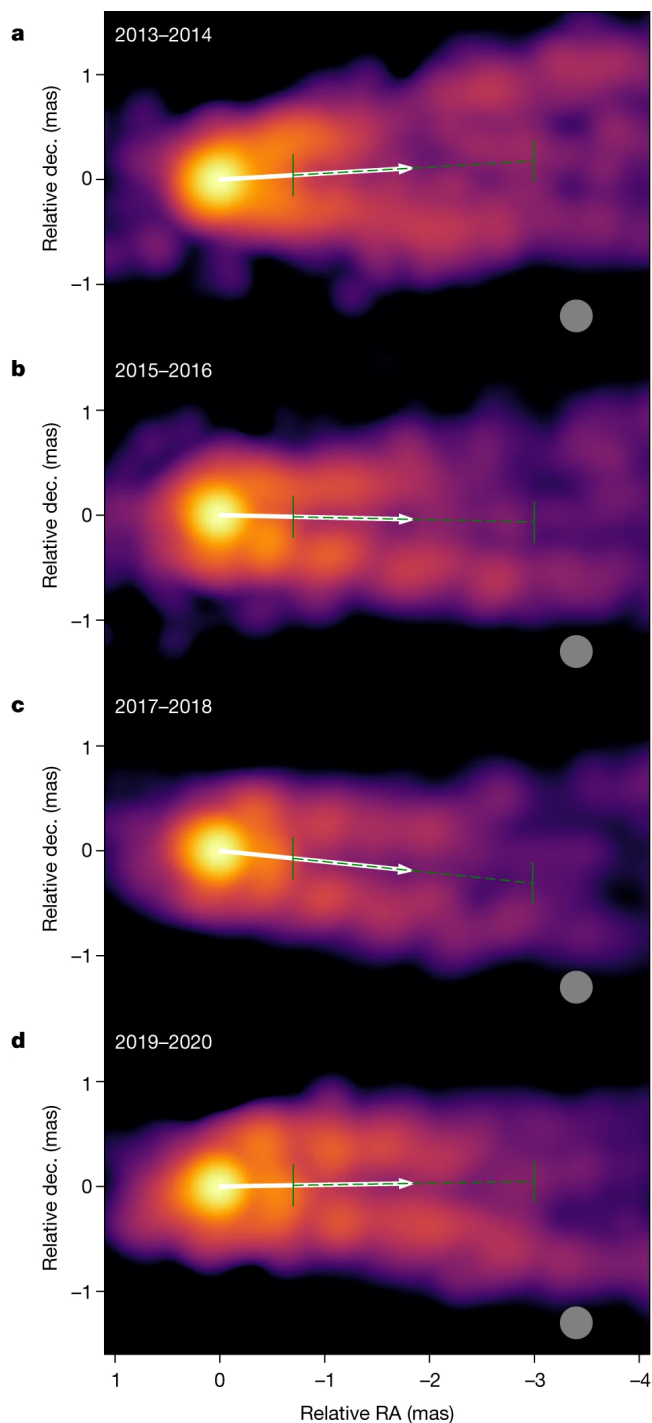


图 5.1 2013 年-2020 年期间 M87 星系喷流的结构演化。该图引自^[218]。

者，双星运动将不再局限在一个平面内。但我们有如下观察

- 总可以建立一个非惯性参考系，在该参考系中双星运动局限在一个平面内。
- 这一非惯性参考系与观测者所在的惯性参考系之间一定可以通过 Euler 转动联系起来。

首先定义观测者所在的惯性系为“基本系”，以符号 (X, Y, Z) 代表。尽管此时自旋和轨道角动量不再分别守恒，但总角动量 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ 仍然保持守恒，所以选择总角动量方向作为基本系的 Z 轴。与坐标 (X, Y, Z) 关联的球坐标系记

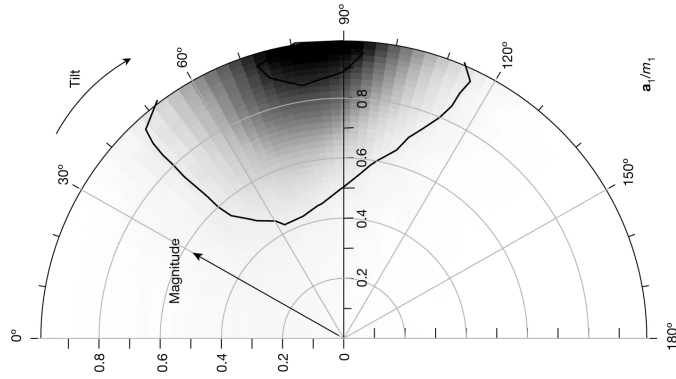


图 5.2 引力波事件 GW200129 中较大质量黑洞自旋大小和方向的后验概率密度分布。该图引自 [210]。为了方便排版，我们将原图逆时针旋转了 90 度。Tilt 代表了自旋矢量与轨道角动量之间的夹角 κ_1 ，Magnitude 表示无量纲自旋的大小 χ_1 。阴影区域集中在 $\kappa_1 \approx 90$ deg 附近表示自转角动量 S_1 几乎与轨道平面平行。

做 (r, θ, ϕ) 。

其次定义双星在特定平面轨道内运动的参考系为“轨道系”，以符号 (x, y, z) 表示。考虑到轨道角动量 \mathbf{L} 总是垂直于双星相对位置矢量和相对速度矢量张成的平面内，我们以轨道角动量方向 $\hat{\mathbf{L}}$ 为轨道系的 z 轴。与之关联的球坐标系表示为 $(r, \pi/2, \psi)$ 。其中 r 与基本系中的 r 含义相同，表示双星相对间距。

轨道系 $x-y$ 平面与基本系 $X-Y$ 平面的重叠部分称为“交线”(node line)，沿双星相对运动方向，轨道从下向上穿过 $X-Z$ 平面的点称为升交点 (ascending node)，反之称为降交点 (descending node)。从质心指向升交点的方向定义为轨道参考系的 x 轴。因为交线同时垂直于 z 轴和 Z 轴，因此 $\mathbf{e}_x \propto \mathbf{e}_Z \times \mathbf{e}_z$ 。此外，还需要定义一组角度：

- 倾角 (inclination) Θ ：轨道系 z 轴和基本系 Z 轴之间的夹角，也就是总角动量与轨道角动量之间的夹角。
- 升交点赤经 (longitude of the ascending node) Y ，代表轨道角动量在 $X-Y$ 平面上投影的方位角。
- 近心点赤经 (longitude of the pericenter) ψ_0 ：轨道近心点与交线之间的夹角。

以上几何关系展示在图 (5.3) 中。

轨道系和基本系之间的变换关系是 Euler 转动，三个 Euler 角中的两个分别是倾角 Θ 和升交点赤经 Y 。第三个 Euler 角记做 α ，代表惯性系与非惯性系之间的洛伦兹推动，由方程 [219]

$$\dot{\alpha} = -\dot{Y} \cos \Theta \quad (5.1)$$

确定。因此 Euler 转动可以记做如下旋转矩阵

$$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)^\top = \mathcal{R} \cdot (\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)^\top, \quad (5.2)$$

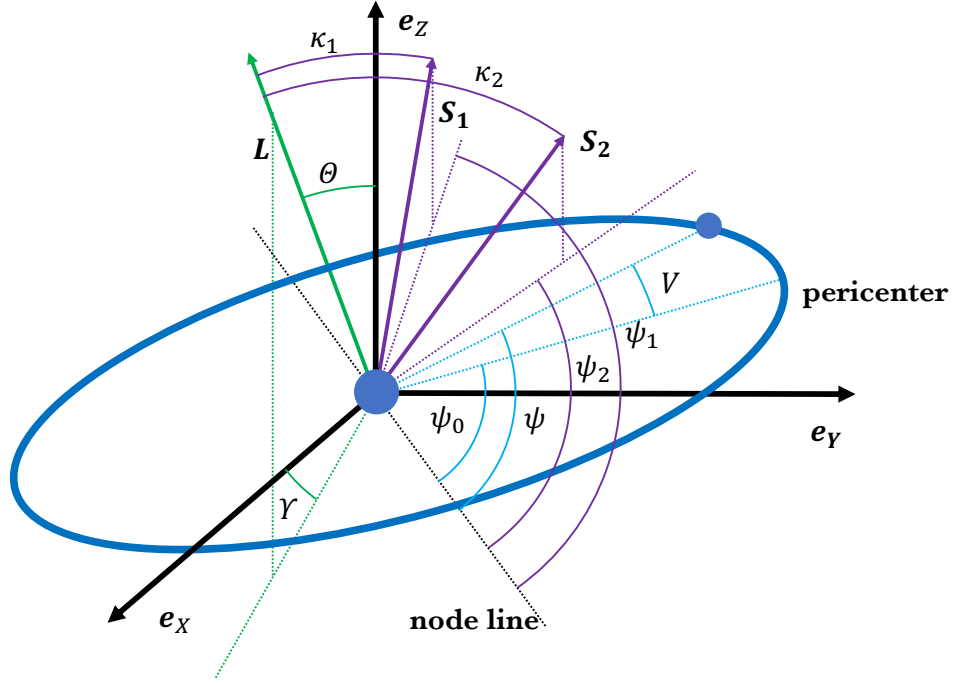


图 5.3 进动偏心双星系统的几何构型。其中蓝色实线标记的椭圆为双星系统的相对运动轨道，中心蓝色点为双星质心，位于蓝色轨道上的蓝色点代表双星相对位置（或约化单体的位置）。黑色实线代表了基本系的三根轴，黑色虚线代表了基本系和轨道系的交线。淡蓝色线条标记了轨道上的特殊点——相对位置（真近点角 V ）和近心点（赤经 ψ_0 ）。紫色线条标记了双黑洞自旋角动量矢量 (S_A) 及其方位角 (κ_A 和 ψ_A)。绿色线标记了轨道角动量的方位角 θ 和 γ 。

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos Y & \sin Y & 0 \\ -\sin Y & \cos Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

此外，还可以根据 $e_x \equiv e_x$ 、 $e_y \equiv e_z \times e_x$ 和 $e_z \equiv e_z$ 定义“共进动系”。在该系中，轨道角动量仅相对总角动量发生章动而不发生进动，即 θ 变化而 Y 不变。

5.1.2 轨道运动的几何描述

与自旋平行情形相似，我们不会直接对运动方程和进动方程进行求解，而是借助能量和角动量将运动方程重新为方程 (4.3) 的形式，再以准开普勒参数化求解。在自旋进动情形下，基本系中的双星相对位置矢量及其时间导数写为

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{n}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{n}} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi. \quad (5.4)$$

体系的能量和角动量由 $E = \mu\varepsilon = \mu(\varepsilon_N + \delta\varepsilon)$ 和 $\mathbf{L} = \mu\mathbf{h}$ 给出，能量仍然可以分为广义相对论部分和 dCS 修正，dCS 修正对轨道角动量没有修正。借助 Newton 阶机械能和角动量的定义，可以将总能量写为

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \right] - \frac{m}{r} + \delta\varepsilon. \quad (5.5)$$

将轨道角动量在基本系中写为

$$\mathbf{h} = r^2 \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

\mathbf{h} 的模长 $h \equiv |\mathbf{h}|$ 和沿 \mathbf{e}_Z 方向的分量分别是

$$h^2 = r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), \quad h \cos \Theta = r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta. \quad (5.7)$$

借助 $\varepsilon, h^2, h \cos \Theta$ 等三个参数，运动方程可以有守恒量的表达式 (5.5, 5.6) 改写为^[182,220]

$$\dot{r}^2 = 2(\varepsilon - \delta\varepsilon) + \frac{2m}{r} - \frac{h^2}{r^2}, \quad (5.8a)$$

$$\dot{\phi} = \frac{h \cos \Theta}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\theta}^2 = \left(\frac{h \sin \Theta}{r^2} \right)^2. \quad (5.8b)$$

可以看到对角向方程的求解依赖于已知的 Θ ，而这需要从进动方程得到。因此我们不妨采用 $\{\Theta, Y\}$ 替代 $\{\theta, \phi\}$ 。一方面，在轨道系中，相对位置矢量可以写为 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ 。同时在基本系中可以写为 $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 。考虑两系之间的坐标变换， $\hat{\mathbf{n}}$ 在基本系中也可以写为

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos Y \cos(\psi + \alpha) - \cos \Theta \sin Y \sin(\psi + \alpha) \\ \cos \Theta \cos Y \sin(\psi + \alpha) + \sin Y \cos(\psi + \alpha) \\ \sin \Theta \sin(\psi + \alpha) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

对比基本系中的两个不同表达式可以得到^[182,220]

$$\begin{cases} \sin \theta \cos(\phi - Y) = \cos(\psi + \alpha) \\ \sin \theta \sin(\phi - Y) = \cos \Theta \sin(\psi + \alpha) \\ \cos \theta = \sin \Theta \sin(\psi + \alpha) \end{cases}, \quad (5.10)$$

这将双星在轨道系中的运动与基本系中的运动关联了起来。这样我们就避免了再通过复杂的方程求解 (θ, ϕ) 运动。取而代之的是求解较为简单的 ψ 的解，它的变化率完全由轨道角动量的大小决定，方程是

$$\dot{\psi} = \frac{h}{r^2}. \quad (5.11)$$

5.1.3 自旋进动的几何描述

因为运动方程 (3.31, 3.38) 涉及到自旋矢量与其他物理量的点乘或叉乘，因此需要选定一个坐标系将自旋矢量具体的表达出来。我们的选择是轨道参考系，自旋矢量表示为

$$\mathcal{S}_A = m_A^2 \chi_A (\sin \kappa_A \cos \psi_A, \sin \kappa_A \sin \psi_A, \cos \kappa_A). \quad (5.12)$$

S_A 是自旋矢量的模长， κ_A 是自旋矢量 S_A 与轨道角动量 L 之间的夹角， ψ_A 是自旋角动量 S_A 在轨道平面的投影与交线之间的夹角。这些角度都标记在图 (5.3) 中。

对方程 (3.38) 的求解不是一个容易的工作^[106,166]，在本文中不会真正涉及。为后文叙述的方便，我们首先说明本文涉及到的几何量—— $\{\kappa_A, \psi_A, \Theta, Y\}$ 与自旋角动量矢量之间都存在直接的关系。一旦将方程 (3.38)，就立刻可以完成对整个系统动力学的完整讨论。

但是我们从进动方程中不难看到，在后牛顿框架下，自旋进动的时标远远长于轨道运动的时标。进动时标可以估计为 $\tau_{\text{precession}} \sim \mathcal{O}(\dot{S})/\mathcal{O}(S) \sim mv^{-5}$ ，而轨道运动的时标是 $\tau_{\text{orbit}} \sim mv^{-3}$ ，这显著高于自旋进动的时间尺度。这启发我们可以在不同时间尺度上对轨道运动和自旋进动进行分离。在考察轨道运动时，自旋矢量仅发生极其微小的变化，为简单期间可以将与自旋相关的几何量视为常数。反之，一个自旋进动周期内，轨道运动已经完成数百甚至数千次，那么每个轨道周期内双星运动的“细节”对自旋进动的影响都是不显著的。取而代之的是轨道运动的平均效应。这就构成了多尺度分析 (multiple-scale analysis) 的主要思想。在此基础上就实现了轨道运动方程 (3.31) 和自旋进动方程 (3.38) 的相互解耦。Chatziioannou 和 Loutrel 等人^[106,166]正是这一方法下完成了对进动方程的解析求解。

本文主要关注双星系统的轨道运动。在后面的计算中，我们将 $\{\Theta, Y, \kappa_A, \psi_A\}$ 的与自旋矢量相关的几何量暂时看做常数。它们在长于轨道周期的时间尺度上缓慢演化，从而给引力波形带来的复杂的低频调制。这些效应将在未来的研究中涉及。

5.2 周期平均化轨道角动量作为守恒量

在多尺度分析的框架下，我们原则上已经可以开始针对运动方程 (5.8a, 5.11) 进行参数化求解。但是我们仍然面临一个严重的问题——要积分一个平面内的运动，至少需要两个守恒量，这两个守恒量一般是能量与角动量的大小。

守恒能量的表达式不难给出。借助方程 (5.12) 中引入的角度，可以将双黑洞系统的结合能写为 $\varepsilon = \varepsilon_N + \delta\varepsilon$ ，其中 dCS 修正是 $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_{\text{SS}} + \delta\varepsilon_{\text{MQ}}$ ，分别是

$$\delta\varepsilon_{\text{SS}} = -\frac{25}{256} \frac{\zeta}{v} \gamma^3 \chi_1 \chi_2 \left\{ \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 - \frac{1}{2} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \left[3 \cos 2(V + \psi_0 - \bar{\psi}) + \cos \Delta\psi \right] \right\}, \quad (5.13a)$$

$$\delta\epsilon_{\text{MQ}} = \frac{201}{3584}\zeta\gamma^3 \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \left\{ \cos^2 \kappa_A - \frac{1}{2} \sin^2 \kappa_A [1 + 3 \cos 2(V + \psi_0 - \psi_A)] \right\}. \quad (5.13b)$$

但是对角动量的大小却并不容易。因为在精确到 2PN 近似时，角动量大小的守恒性会受到破坏。由总角动量守恒 $\dot{\mathbf{J}} = 0$ 和进动方程 (3.38) 可以给出轨道角动量 \mathbf{h} 演化方程，其模长的时间导数是

$$\dot{h} \equiv \mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{h}} = -\zeta \left(\frac{m}{r}\right)^3 \left\{ \frac{75}{256} \frac{1}{v} \frac{1}{m_1^2} \frac{1}{m_2^2} [(\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{S}_1) + (\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{S}_2)] - \frac{603}{1792} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \frac{1}{m_A^4} (\mathbf{S}_A \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{S}_A) \right\} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (5.14)$$

这一变化率在 $\mathcal{O}(\zeta)$ 阶次非零。这说明自旋-轨道耦合会导致轨道角动量方向变换但大小不变，而自旋-自旋耦合和单极-四极耦合既会导致方向变化，也会导致大小变化。下面，我们首先构造一个新的守恒量——周期平均化的角动量 $\bar{\mathbf{h}}$ ，然后根据 $\bar{\mathbf{h}}$ 进一步改写运动方程 (5.8a, 5.11)。

因为 \mathbf{h} 守恒性的破坏仅在 2PN 受到破坏，所以针对这一问题的处理只需要精确到 0PN。我们首先将径向运动参数化为

$$r = mj^2 [1 + a \cos(\psi - \psi_0)]^{-1}, \quad (5.15)$$

其中 $j = h/m$ ， a 是 Newton 阶无量纲化的 Runge-Lenz 矢量的模长，定义为

$$a = \sqrt{1 + 2j^2 \epsilon_N}, \quad (5.16)$$

ψ_0 是近心点赤经，在这里仅看做常数。将参数化解 (5.15) 代入方程 (5.14) 给出

$$mj = j^{-6} (1 + a \cos V)^3 \times \zeta \left\{ \frac{75}{256} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin 2(\psi - \bar{\psi}) - \frac{603}{1792} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A \sin 2(\psi - \psi_A) \right\}. \quad (5.17)$$

其中 $\bar{\psi} \equiv (\psi_1 + \psi_2)/2$ 。方程 (5.15) 的高阶修正在方程 (5.17) 中都将进入高于 2PN 的阶次。对 j 做轨道周期平均，并设时间周期为 T ，得到

$$\frac{1}{T} \int_0^T j dt = 0, \quad (5.18)$$

这一等式启发我们，尽管轨道角动量的模长 j 是随时间变化的，但却只是一个周期性的震荡。且震荡的幅度相对于平均值是个 2PN 阶次的小量。这就启发我们

可以以期平均值作为一个新的守恒量，而将残余的震荡作为扰动进行处理。基于上述讨论，我们正式地定义周期平均化角动量 \bar{j} 为^[101-103]

$$\bar{j} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} j(\psi') d\psi', \quad (5.19)$$

很容易证明这是一个守恒量。轨道角动量的瞬时值 $j(t)$ 是在这一平均值基础上叠加一个微小的周期震荡得到的。设在某一初始时刻双星相对方位角 $\psi = 0$ ，对应轨道角动量大小为 $j(\psi = 0) = j_0$ ，积分 j 得到

$$j(V) = j_0 + \int_0^{\psi} j \frac{dt}{d\psi'} d\psi' = j_0 + \delta\tilde{j}(V), \quad (5.20)$$

其中 V 仍然是真近点角，定义为 $V = \psi - \psi_0$ 。其中修正项 $\delta\tilde{j}$ 处于 $\mathcal{O}(\zeta)$ 阶次，其形式必然是以 V 的整数倍为相位的周期震荡。从而保证了 $j(V = 0) = j(V = 2\pi) = 0$ 。将方程 (5.20) 代回平均化角动量的定义 (5.19)，积分得到平均值 \bar{j} 与初始值 j_0 的关系，将该关系代回到方程 (5.20) 中消除 j_0 ，得到

$$j(V) = \bar{j} + \delta j, \quad \delta j = \delta j_{SS} + \delta j_{MQ}, \quad (5.21)$$

其中 dCS 修正是

$$\begin{aligned} \delta j_{SS} = & -\frac{25}{512} \frac{\zeta}{v} \frac{1}{\bar{j}^3} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \left\{ 3 \cos 2(V + \psi_0 - \bar{\psi}) \right. \\ & \left. + \bar{a} \left[3 \cos(V + 2(\psi_0 - \bar{\psi})) + \cos(3V + 2(\psi_0 - \bar{\psi})) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.22a)$$

$$\begin{aligned} \delta j_{MQ} = & \frac{201}{7168} \zeta \frac{1}{\bar{j}^3} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A \left\{ 3 \cos 2(V + \psi_0 - \psi_A) \right. \\ & \left. + \bar{a} \left[3 \cos(V + 2(\psi_0 - \psi_A)) + \cos(3V + 2(\psi_0 - \psi_A)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.22b)$$

从而将轨道角动量的大小写成了守恒量与微小的周期扰动之和的形式。其中平均化 Runge-Lenz 矢量模长是 $\bar{a} = \sqrt{1 + 2\bar{j}^2 \epsilon_N}$ 。

5.3 改进的准开普勒参数化

在引入了多尺度分析和平均化轨道角动量作为运动常数后，我们开始将准开普勒参数化应用于运动方程 (5.8a, 5.11) 的求解。首先在轨道系中的运动方程改写为

$$\dot{r}^2 = 2(\epsilon - \delta\epsilon) + 2\gamma - \gamma^2(\bar{j}^2 + 2\bar{j}\delta j), \quad (5.23)$$

和

$$m\dot{\psi} = \bar{j}\gamma^2 \left(1 + \frac{\delta j}{\bar{j}} \right). \quad (5.24)$$

该方程是自旋平行情况下运动方程 (4.3) 的自然推广。

该方程的参数化方案最早由 Gergely 等人^[101,103]给出。但是这一参数化方案在 $\bar{a} \rightarrow 0$ 时存在奇点，导致了参数化解在零偏心率极限时失效^[221]。Klein 等人^[104-105]改进了这一参数化，得到了在 $\bar{a} = 0$ 处平滑的结果。该结果是

$$r = \frac{m}{\xi}(1 - e_r \cos u) + f_r^{(\text{SS})} \cos(2V + 2\psi_0 - \psi_1 - \psi_2) + \sum_A f_{r,A}^{(\text{MQ})} \cos[2V + 2(\psi_0 - \psi_A)], \quad (5.25)$$

$$\frac{2\pi}{K}\psi = 2 \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{1+e_\psi}{1-e_\psi}} \tan\left(\frac{u}{2}\right) \right\} + \sum_{n=1}^2 \left\{ f_{\psi,n}^{(\text{SS})} \sin(nV + 2\psi_0 - \psi_1 - \psi_2) + \sum_A f_{\psi,n,A}^{(\text{MQ})} \cos[nV + 2(\psi_0 - \psi_A)] \right\}, \quad (5.26)$$

$$\ell \equiv \frac{2\pi}{T}t(u) = u - e_t \sin u, \quad (5.27)$$

其中 u 是偏近点角，它与真近点角 V 的关系仍由方程 (4.10, 4.11) 给出。我们仍然以半长轴 ξ 和径向偏心率 e_r 为基本的轨道根数。参数化解中涉及到的几个表征自旋进动的参数 $f_r^{(\text{SS})}$, $f_{r,A}^{(\text{MQ})}$, $f_{\psi,n}^{(\text{SS})}$, $f_{\psi,n,A}^{(\text{MQ})}$ 表达式如下

$$f_r^{(\text{SS})} = -\frac{25}{512}\zeta \left(\frac{m\xi}{1-e_r^2} \right) \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \quad (5.28a)$$

$$f_{r,A}^{(\text{MQ})} = \frac{201}{7168}\zeta \left(\frac{m\xi}{1-e_r^2} \right) \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A, \quad (5.28b)$$

$$f_{\psi,1}^{(\text{SS})} = -\frac{25}{256}\zeta e_r \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \quad (5.28c)$$

$$f_{\psi,1,A}^{(\text{MQ})} = \frac{201}{3584}\zeta e_r \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A, \quad (5.28d)$$

$$f_{\psi,2}^{(\text{SS})} = -\frac{25}{1024}\zeta \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \quad (5.28e)$$

$$f_{\psi,2,A}^{(\text{MQ})} = \frac{201}{14336}\zeta \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A. \quad (5.28f)$$

轨道根数与守恒量之间的关系是

$$\varepsilon = -\frac{\xi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\xi^2}{1-e_r^2} \right) \delta\varpi \right\}, \quad (5.29a)$$

$$\bar{j} = \sqrt{\frac{1-e_r^2}{\xi}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 (3 + e_r^2) \delta\varpi \right\}, \quad (5.29b)$$

方程 (5.29) 与方程 (4.14, 4.15) 在形式上完全一致，区别在于需要将轨道角动量 j 替换为平均化的轨道角动量 \bar{j} ，并且将修正常数 $\delta\varpi$ 需要替换为带有自旋进动的版本

$$\delta\varpi \equiv \zeta \left\{ \frac{25}{512} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 (2 \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 - \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta\psi) - \frac{201}{14336} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 (1 + 3 \cos 2\kappa_A) \right\}. \quad (5.30)$$

在自旋平行情况时 $\kappa_A = 0$ ，定义 (5.30) 回到方程 (4.2)。时间偏心率 e_t 、角向偏心率 e_ψ 、时间周期 T 、方位角周期 K 和轨道频率 Ω 等轨道参数仍然由方程 (4.23, 4.24, 4.26) 给出。主要的区别在于：修正参数 $\delta\varpi$ 需要替换为带有自旋进动的版本 (5.30)，角向偏心率 e_ϕ 应当替换为轨道系中的对应版本 e_ψ 。精确到主导阶，进动角 ψ_0 可以用进动率乘以真近点角表出，即 $\psi_0 = \beta V$ 。最终参数化结果写为

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{\xi}{1 - e_r^2} (1 + e_r \cos V) + \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^3 (1 + e_r \cos V)^2 \\ & \times \left\{ \frac{25}{256} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \kappa_2 \cos [2(1 + \beta)V - 2\tilde{\psi}] - \frac{201}{3584} \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A \cos [2(1 + \beta)V - 2\psi_A] \right\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

和

$$\begin{aligned} \psi = & (1 + \beta)V + \delta\varpi \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 e_r \sin V + \frac{1}{4} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 \\ & \times \left\{ - \frac{25}{256} \frac{1}{v} \chi_1 \chi_2 \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \left\{ 4e_r \sin [(1 + 2\beta)V - 2\tilde{\psi}] + \sin [2(1 + \beta)V - 2\tilde{\psi}] \right\} \right. \\ & \left. + \sum_A \frac{201}{3584} \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sin^2 \kappa_A \left\{ 4e_r \sin [(1 + 2\beta)V - 2\psi_A] + \sin [2(1 + \beta)V - 2\psi_A] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

从径向运动方程 (5.31) 可以看到，在考虑自旋进动后，真正意义上的圆轨道是不存在的。即使我们令偏心率 $e_r = 0$ 也不能得到 γ 是常数这一结论。这是因为自旋矢量方向的任意性，尤其是平行于轨道平面的分量导致双星轨道平面上出现了一个新的特殊方向，从而破坏了平面轨道运动原有的几何对称性。因此在后文中，我们将采用“零偏心率轨道”而不是“圆轨道”来指代 $e_r = 0$ 的极限。

在讨论一般平面轨道运动时，我们曾阐述轨道运动的双周期结构。在考虑了双星的自旋进动时，参数化解的周期结构将更加复杂，这些周期结构来自于

- 轨道近心点的进动，由 $\psi_0 = \beta V$ 描述，相对轨道运动周期在 $\sim \mathcal{O}(v^{-4})$ 量级，将出现在引力波形相位修正的 2PN 阶次。
- 自旋角动量矢量相对总角动量的章动，在数学上由 κ_A 描述，其演化由进

动方程 (3.38) 给出，相对轨道运动的周期在 $\sim \mathcal{O}(v^{-3})$ 量级，出现在引力波相位修正的 1.5PN 阶次。

- 自旋角动量矢量绕总角动量方向的漂移，在数学上由 ψ_A 描述，相对轨道运动的周期在 $\sim \mathcal{O}(v^{-2})$ 量级，将会出现在引力波相位修正的 1PN 阶次。

以上效应都为引力波形带来了复杂的低频调制。导致了轨道运动的多重周期结构。为简单起见，本文主要研究少数轨道周期内的引力辐射及其反作用，将这些长周期修正项看做常数。

5.4 守恒部分的引力波形

到目前为止，已经给出在轨道参考系中双黑洞系统的运动。基于这一结果，我们可以构建守恒部分的引力波形。由于标量场不依赖于参考系的选择，因此只要将 $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ 代入方程 (3.61)，即可得到标量辐射的波形

$$\begin{aligned}
 \vartheta = & \frac{5}{16} \frac{\alpha}{\beta m^2} \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 \frac{1}{v} \frac{m_2}{m} \chi_1 \left\{ \frac{1}{8} \left[-4e_r \cos(\beta V + 2\tilde{\alpha} + \psi_1) \right. \right. \\
 & - 2(2 + e_r^2) \cos[(1 + \beta)V + 2\tilde{\alpha} + \psi_1] - e_r^2 \cos[(1 - \beta)V - 2\tilde{\alpha} - \psi_1] \\
 & - 4e_r \cos[(2 + \beta)V + 2\tilde{\alpha} + \psi_1] - e_r^2 \cos[(3 + \beta)V + 2\tilde{\alpha} + \psi_1] \left. \right] \sin^2 \iota \sin \kappa_1 \\
 & + \frac{1}{8} \left[4e_r \cos(\beta V - \psi_1) + e_r^2 \cos[(1 - \beta)V + \psi_1] + 2(2 + e_r^2) \cos[(1 + \beta)V - \psi_1] \right. \\
 & + 4e_r \cos[(2 + \beta)V - \psi_1] + e_r^2 \cos[(3 + \beta)V - \psi_1] \left. \right] (3 - \cos^2 \iota) \sin \kappa_1 \\
 & + \frac{1}{4} \left[4e_r \sin(\tilde{\alpha} + \beta V) + 2(2 + e_r^2) \sin[(1 + \beta)V + \tilde{\alpha}] - e_r^2 \sin[(1 - \beta)V - \tilde{\alpha}] \right. \\
 & \left. + 4e_r \sin[(2 + \beta)V + \tilde{\alpha}] + e_r^2 \sin[(3 + \beta)V + \tilde{\alpha}] \right] \sin \iota \cos \iota \cos \kappa_1 \left. \right\} - (1 \leftrightarrow 2).
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

表达式最后的 $(1 \leftrightarrow 2)$ 表示将天体的记号 1, 2 进行对换。

同时，我们也可以利用引力辐射的一般表达式 (3.80)，在轨道系中计算引力波形。这一波形可以清楚地区分为广义相对论部分和 dCS 修正。但对于无穷远处的观测者来说，还需要将这一波形转换到基本系中。根据第 5.1 节的讨论，轨道系和基本系之间由 Euler 转动 (5.3) 联系起来。完成转动后再施加 TT 规范，从而得到引力波极化，由 $\xi_+ = \xi_{11}^{\text{TT}}, \xi_{\times} = \xi_{12}^{\text{TT}}$ 给出。

我们仍然希望将总的引力辐射拆分为广义相对论部分和 dCS 修正 $\xi_{+, \times} = \xi_{+, \times}^{(0)} + \delta \xi_{+, \times}$ ，但这对自旋进动系统是无法实现的。因为 dCS 引力对自旋进动产生修正，进而决定了基本系和轨道系之间的 Euler 变换。因此 dCS 修正项将被嵌入到低于 2PN 所有阶次的引力波形中。在本文中，这一修正由三个 Euler 角 $\{\Theta, Y, \alpha\}$ 表示。其中 Θ 带来的调制体现在引力波振幅上，而 $\{Y, \alpha\}$ 的调制体现

在相位上。通过量级分析可知 $\Theta \sim \mathcal{O}(|\mathbf{S}_A|/|L|) \sim \mathcal{O}(v)^{[166]}$ 。因此，通过自旋进动产生的修正可以根据 $\sin \Theta$ 进行 Taylor 展开。

引力波形中 dCS 修正还可以通过对轨道运动的影响实现。这一部分不依赖章动角 Θ ，而是直接正比于耦合常数 ζ 和自旋的平方阶， $\chi_1 \chi_2$ 或 χ_A^2 。同时带有 $\{Y, \alpha, \psi_A, \kappa_A, \psi_0\}$ 等参数带来的 2PN 相位修正。

综上所述，我们仍然可以将波形分离为

$$\xi_{+,x} = \xi_{+,x}^{(0)} + \delta\xi_{+,x} \quad (5.34)$$

的形式，但这里的 $\xi_{+,x}^{(0)}$ 不再代表广义相对论部分的波形，而是代表通过章动角引入的 dCS 修正。这部分波形完整地写为

$$\xi_{+,x}^{(0)} = \Sigma_{+,x}^{(0)} + \sin \Theta \Sigma_{+,x}^{(1/2)} + \sin^2 \Theta \Sigma_{+,x}^{(1)} + \sin^3 \Theta \Sigma_{+,x}^{(3/2)} + \sin^4 \Theta \Sigma_{+,x}^{(2)}, \quad (5.35)$$

其中 $\Sigma_{+,x}^{(k)}$ 在补充材料 A.4.1 中给出。 $\delta\xi_{+,x}$ 则代表了通过改变轨道运动而引入的 dCS 修正，可以写为

$$\delta\xi_{+,x} = \delta\xi_{+,x}^{(SS)} + \delta\xi_{+,x}^{(MQ)}, \quad (5.36)$$

其中

$$\delta\xi_{+}^{(SS)} = \frac{75}{512} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^3 \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \sum_{k=0}^7 [A_k^+ \cos(kV) + B_k^+ \sin(kV)], \quad (5.37a)$$

$$\delta\xi_{\times}^{(SS)} = \frac{75}{512} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^3 \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \sum_{k=0}^7 [A_k^\times \cos(kV) + B_k^\times \sin(kV)] \quad (5.37b)$$

$$\delta\xi_{+}^{(MQ)} = \frac{201}{1792} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^3 \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sum_{k=0}^7 [C_{A,k}^+ \cos(kV) + D_{A,k}^+ \sin(kV)], \quad (5.38a)$$

$$\delta\xi_{\times}^{(MQ)} = \frac{201}{1792} \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^3 \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \sum_{k=0}^7 [C_{A,k}^\times \cos(kV) + D_{A,k}^\times \sin(kV)] \quad (5.38b)$$

振幅因子 $A_k^{+, \times}, B_k^{+, \times}, C_{A,k}^{+, \times}, D_{A,k}^{+, \times}$ 展示在补充材料 A.4.2 和 A.4.3 中。如前所述，这些因子不是常数，而是相对轨道运动更长周期的函数，依赖于 $\{\psi_0 = \beta V, \kappa_A, \psi_A\}$ 等参数。但在本文中我们采用多尺度分析方法，只关注双黑洞系统临近并合时刻的运动和辐射，因此可以将它们视为常数。

但采用多尺度分析只是暂时的做法。未来的第三代引力波探测器将对低频引力波更加敏感，有望探测到更多的处于旋近时期的双黑洞引力波源^[25-26]。通过对低频结构的提取，有望对双黑洞自旋做出更好的参数估计。同时，也有望改善对宇称破缺引力理论的约束。在前面讨论自旋平行情形的讨论中可以看到，dCS

修正对引力波的修正完全出现在 2PN 阶次，这是一个非常微弱的修正。但是在自旋进动情形中，引力波振幅的修正将会体现在更低阶的后牛顿阶次上。这会使得波形中出现更加显著的相对广义相对论的破缺。同时，dCS 引力还会给引力波形带来多种长周期相位调制。通过较长时间的信号接收，这些相位修正会逐渐累积，最终形成一个对广义相对论总的偏离。也就允许我们对宇称对称性破缺做出更紧的约束。

5.5 辐射反作用和残余偏心率

将守恒部分的标量辐射 (5.33) 和引力辐射 (5.35, 5.36) 代入辐射能流 (4.63, 4.68) 和角动量流 (4.78, 4.82)，得到双星系统的能量和角动量损失率。其中能量的损失很容易计算得到

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} = & \frac{32}{5} \frac{v^2 \xi^5}{(1 - e_r^2)^{7/2}} \left\{ \left(1 + \frac{73}{24} e_r^2 + \frac{37}{96} e_r^4 \right) \right. \\
 & + \zeta \left(\frac{\xi}{1 - e_r^2} \right)^2 \left\{ \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \left[\left(\frac{10775}{12288} + \frac{137825}{24576} e_r^2 + \frac{133925}{32768} e_r^4 + \frac{49975}{196608} e_r^6 \right) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 \right. \right. \\
 & - \left. \left(\frac{4325}{24576} + \frac{47675}{49152} e_r^2 + \frac{50375}{65536} e_r^4 + \frac{24325}{393216} e_r^6 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta\psi \right. \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{118825}{32768} + \frac{351775}{98304} e_r^2 + \frac{112625}{524288} e_r^4 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos 2(\bar{\psi} + \beta V) \right] \right\} \\
 & - \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \left[\left(\frac{23869}{344064} + \frac{470395}{688128} e_r^2 + \frac{422759}{917504} e_r^4 + \frac{23903}{1835008} e_r^6 \right) \right. \\
 & + \left. \left(\frac{49815}{114688} + \frac{582273}{229376} e_r^2 + \frac{1731951}{917504} e_r^4 + \frac{244119}{1835008} e_r^6 \right) \cos \kappa_A^2 \right. \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{567591}{458752} + \frac{563707}{458752} e_r^2 + \frac{535167}{7340032} e_r^4 \right) \sin \kappa_A^2 \cos 2(\psi_A + \beta V) \right] \right\} \Bigg\}. \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

其中我们仍然将 $\{\psi_0 = \beta V, \kappa_A, \psi_A\}$ 等长周期变量看做常数。能流中仅包含了 0PN 部分和 2PN 的 dCS 修正，这是因为自旋进动仅仅以 Euler 转动的形式影响引力波形，因此在各方向平均的意义上对辐射能流没有贡献。

定义 (4.78, 4.82) 也允许我们计算系统的角动量损失。因为在自旋进动情形中，系统不再具有特殊的方向，因此角动量损失率的三个分量都不再是零，且都会对引力波形产生反作用。在本文中，我们首先关心双星轨道运动的辐射衰减，因此只需要计算轨道角动量损失的大小 (仍然记做 \mathcal{L}) 即可。记总角动量损失为 $d\mathbf{J}/dt$ ，其中包含了来自轨道角动量和自旋角动量的损失，即 $(d/dt)(\mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)$ 。Gergely^[101] 已经证明了自旋角动量的贡献进入高阶后牛顿修正，因此这里不再关心。轨道角动量流的大小为 $dL/dt = \hat{\mathbf{L}} \cdot (d\mathbf{L}/dt)$ ，于是总角动量流的大小满足 $dJ/dt = \hat{\mathbf{J}} \cdot (d\mathbf{J}/dt) \propto \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{L}}(dL/dt) \propto \cos \Theta(dL/dt)$ 。因此 $\mathcal{L} \equiv (dL/dt) =$

$(\cos \Theta)^{-1}(dJ/dt)$, 详细计算得到

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{32}{5} \frac{mv^2 \xi^{7/2}}{(1-e_r^2)^2} \left\{ \left(1 + \frac{7}{8} e_r^2 \right) \right. \\
 & + \zeta \left(\frac{\xi}{1-e_r^2} \right)^2 \left\{ \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \left[\left(\frac{8975}{12288} + \frac{1125}{512} e_r^2 + \frac{16775}{32768} e_r^4 \right) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 \right. \right. \\
 & - \left(\frac{475}{6144} + \frac{1925}{8192} e_r^2 + \frac{2425}{16384} e_r^4 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta\psi \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{7125}{8192} + \frac{825}{4096} e_r^2 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos 2(\bar{\psi} + \beta V) \right] \right\} \\
 & - \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \left[\left(\frac{10679}{86016} + \frac{42515}{114688} e_r^2 + \frac{4999}{229376} e_r^4 \right) \right. \\
 & + \left(\frac{7261}{24576} + \frac{102257}{114688} e_r^2 + \frac{144895}{458752} e_r^4 \right) \cos \kappa_A^2 \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{31959}{114688} + \frac{9045}{114688} e_r^2 \right) \sin \kappa_A^2 \cos 2(\psi_A + \beta V) \right] \right\} \Bigg\}. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

在自旋进动系统中, 我们采用的守恒量是能量和周期平均化的轨道角动量大小, 因此辐射平衡方程应当重写为

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{F}, \quad \frac{d\bar{L}}{dt} = -\mathcal{L}. \tag{5.41}$$

其中 $\bar{L} = \mu \bar{h} = \mu m \bar{j}$ 。结合方程 (5.29) 并将轨道根数 ξ 和 e_r 看做时间的函数, 平衡方程给出它们的时间变化率。利用轨道频率 $x = (m\Omega)^{2/3}$ 表示, 得到

$$\begin{aligned}
 m \frac{dx}{dt} = & \frac{64}{5} \frac{vx^5}{(1-e_r^2)^{7/2}} \left\{ \left(1 + \frac{73}{24} e_r^2 + \frac{37}{96} e_r^4 \right) \right. \\
 & + \zeta \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left\{ \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \left[\left(\frac{11975}{12288} + \frac{102725}{24576} e_r^2 + \frac{211075}{98304} e_r^4 + \frac{4325}{65536} e_r^6 \right) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 \right. \right. \\
 & + \left(-\frac{5525}{24576} - \frac{12575}{49152} e_r^2 + \frac{39575}{196608} e_r^4 + \frac{4225}{131072} e_r^6 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta\psi \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{118825}{32768} + \frac{351775}{98304} e_r^2 + \frac{112625}{524288} e_r^4 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos 2(\bar{\psi} + \beta V) \right] \right\} \\
 & - \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \left[\left(\frac{14221}{344064} + \frac{752599}{688128} e_r^2 + \frac{133405}{131072} e_r^4 + \frac{123063}{1835008} e_r^6 \right) \right. \\
 & + \left(\frac{59463}{114688} + \frac{42867}{32768} e_r^2 + \frac{28389}{131072} e_r^4 - \frac{7623}{262144} e_r^6 \right) \cos \kappa_A^2 \\
 & \left. \left. - e_r^2 \left(\frac{567591}{458752} + \frac{563707}{458752} e_r^2 + \frac{535167}{7340032} e_r^4 \right) \sin \kappa_A^2 \cos 2(\psi_A + \beta V) \right] \right\} \Bigg\}, \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 m \frac{de_r}{dt} = & -\frac{304}{15} \frac{vx^4 e_r}{(1-e_r^2)^{5/2}} \left\{ \left(1 + \frac{121}{304} e_r^2 \right) \right. \\
 & + \zeta \left(\frac{x}{1-e_r^2} \right)^2 \left\{ \frac{\chi_1 \chi_2}{v} \left[\left(\frac{83825}{77824} + \frac{180275}{155648} e_r^2 + \frac{56825}{622592} e_r^4 \right) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 \right. \right. \\
 & + \frac{1}{e_r^2} \left(-\frac{625}{77824} - \frac{21975}{155648} e_r^2 + \frac{38675}{622592} e_r^4 + \frac{11275}{1245184} e_r^6 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos \Delta\psi \\
 & - \left. \left. \left(\frac{270975}{311296} + \frac{417475}{311296} e_r^2 + \frac{654675}{4980736} e_r^4 \right) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos 2(\bar{\psi} + \beta V) \right] \right\} \\
 & + \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} \chi_A^2 \left[\frac{1}{e_r^2} \left(\frac{625}{155648} - \frac{445055}{2179072} e_r^2 - \frac{4012101}{8716288} e_r^4 - \frac{705885}{17432576} e_r^6 \right) \right. \\
 & - \frac{1}{e_r^2} \left(\frac{625}{155648} + \frac{903631}{2179072} e_r^2 + \frac{1790223}{8716288} e_r^4 + \frac{208641}{17432576} e_r^6 \right) \cos \kappa_A^2 \\
 & \left. \left. + \left(\frac{69435}{229376} + \frac{1966089}{4358144} e_r^2 + \frac{3342141}{69730304} e_r^4 \right) \sin \kappa_A^2 \cos 2(\psi_A + \beta V) \right] \right\} \}. \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

从偏心率的演化方程 (5.43) 可以看到一个有趣的结论——方程右侧存在正比于 $1/e_r$ 的因子，因此在 $e_r \rightarrow 0$ 时， de_r/dt 会出现发散。这在物理上是不允许的。这说明在自旋进动情形下，零偏心率轨道在辐射反作用下是无法稳定存在的。这与自旋平行运动的情况——零偏心率轨道是辐射反作用导致的双星演化的最终稳定态——形成了鲜明的对比。

这一效应是标量辐射导致的。在自旋平行情况下，标量辐射表达式 (3.61) 中 $\hat{n} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$ ，非零项代表标量场的四极辐射。对能流和角动量流取 $e_r \rightarrow 0$ 极限时，符合恒等式 $\mathcal{F} = \Omega \mathcal{L}$ 。这表明能量和角动量的损失是“均衡”的，在频率随辐射反作用增大的同时偏心率单调减小，最终在进入一定高频段后实现圆化。但是在自旋进动情形中，标量辐射中 $\hat{n} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \neq 0$ ，这代表了球对称的标量单极辐射。这一辐射场不依赖于观测者的方位角，仅携带能量而不携带角动量，从而破坏了能量损失和角动量损失之间的均衡，在数学上导致 $e_r \rightarrow 0$ 极限下 $\mathcal{F} = \Omega \mathcal{L}$ 不再成立。这是出现上述效应的物理原因。只要一个系统存在标量单极辐射，且在零偏心率极限下该单极辐射仍然存在，就会出现残余偏心率的现象。类似的效应也出现在 Horndeski 引力的计算中^[174]。该效应有望成为在引力波观测中区分广义相对论和标量-张量引力的一个判据。

令方程 (5.43) 右侧为零，给出方程 $de_r/dt(e_r = e_{\min}) = 0$ ，从中可以确定一个辐射反作用下稳定的轨道偏心率值 e_{\min} ，

$$e_{\min}^2 = \frac{625}{155648} \zeta x^2 \left[\frac{2}{v} (\chi_1 \sin \kappa_1) (\chi_2 \sin \kappa_2) \cos \Delta\psi - \sum_A \frac{m^2}{m_A^2} (\chi_A \sin \kappa_A)^2 \right], \quad (5.44)$$

这一结果完全依赖于双黑洞自旋在轨道平面上的分量，在自旋平行情况下自动

消失。假设一个带有偏心率的自旋进动双星系统在 dCS 引力支配下运动和辐射，当它的初始偏心率大于 e_{\min} 时，其偏心率逐渐演化减小到 e_{\min} 后停止演化，或在此之前完成并合。但相反，如果其初始偏心率小于 e_{\min} ，那么我们将观测到完全相反的效应，即随着引力波频率的增大，轨道偏心率也随之增大。但是需要指出的是，这不意味着轨道发生了所谓的“反圆化”。因为在进动系统中，即使不考虑辐射衰减，真正的圆轨道也是不存在的。偏心率增大不能代表其形状更加偏离圆形，这只有物理参数层面上的意义，而没有几何参数层面上的意义。

5.6 本章小结

我们在第4章求解了 dCS 引力下自旋平行双黑洞系统的运动和引力辐射，Loutrel 等人^[106-107]的工作求解了圆轨道、自旋进动的双星系统的运动和引力辐射。一个自然的推广是将轨道偏心率与自旋进动相结合。本文对这一研究进行了初步尝试。在 2PN 阶次，自旋进动破坏了轨道角动量大小的守恒性，我们仿照 Gergely^[101]的做法引入周期平均化轨道角动量 \bar{j} (5.19) 作为系统新的守恒量。并推广了 Klein 等人^[104-105]的准开普勒参数化方案，给出了轨道参考系中双黑洞的运动 (5.25, 5.26, 5.27)。受到自旋进动的低频调制，这一参数化解呈现出丰富而复杂的频谱结构，本文采用多尺度分析对此进行了简化，与自旋进动相关联的、在长时标上演化的几何量被暂时地看做常数。基于参数化解，我们建立了守恒部分的标量波形 (5.33) 和引力波形 (5.34)。在考虑自旋进动后，广义相对论部分的波形会受到修正后自旋进动的影响，因此无法与 dCS 波形确切分离开来。由于轨道角动量相对总角动量的章动，dCS 修正产生了 0.5PN 阶次的振幅修正。由于轨道角动量方位角的进动漂移，dCS 修正 1PN 的相位修正。而自旋演化对轨道运动的修正则成为 2PN 的相位修正。这些效应 (尤其是出现在低阶后牛顿阶次的效应) 会放大 dCS 波形与广义相对论的差别，从而提高我们检验引力的宇称对称性的能力。我们在本章最后计算了轨道的辐射衰减 (5.42, 5.43)。由于自旋进动系统中存在单极标量辐射，只携带能量而不携带角动量，因此零偏心率轨道不再是双星辐射演化的最终稳定末态，这有望成为区分广义相对论和宇称破缺引力的另一个可观测的判据。

第6章 结论与展望

对称性在现代物理学中占据核心地位，对物理理论对称性的检验是基础物理发展的重要推动力。宇称对称性同样是引力物理的一个基本特性，对引力宇称对称性的检验，或者对宇称破缺效应的观测约束是引力实验的一个重要课题。从理论上讲，dCS 引力是宇称破缺引力理论的典型代表，是弦理论在低能极限下存在的引力修正项，通过对 dCS 引力场方程的求解可以给出对各种天体物理过程的修正。而通过实验上的观测与上述理论预言的对比，可以给出对宇称破缺效应的限制。因此，dCS 引力近年来受到了广泛的关注。在这一理论中，引力波在背景时空中的传播会与背景标量场相互作用，从而诱导出振幅双折射效应，在最终可观测引力波信号中带来额外的振幅和相位修正。同时，通过标量场和度规场的耦合，这一理论修正了孤立旋转天体周围的时空结构，从而给人造卫星及其搭载陀螺仪的运动、脉冲双星的运动带来额外的修正。对这些效应的观测原则上可以给出对 dCS 引力的约束，从而实现引力宇称对称性的检验。然而，这些修正通常十分微弱，通过太阳系和脉冲双星观测给出的约束上限 ($\sqrt{\alpha} \lesssim 10^8 \text{km}$ 和 $\sqrt{\alpha} \lesssim 10^4 \text{km}$)^[88-89] 不能符合弱耦合近似的要求。因此许多研究开始以引力波作为新的探针以提高对宇称破缺效应的约束能力。

基于准圆轨道双黑洞系统引力波形模板及其 dCS 修正，若干工作^[95-97] 使用已有的引力波观测数据对 dCS 理论进行了约束，得到了大致 $\sqrt{\alpha} \lesssim \mathcal{O}(10-40 \text{km})$ 的约束。然而遗憾的是，这依然超出了弱耦合近似的合理范围 [见图 (4.5, 4.6, 4.7)]。而对未来前景的研究也表明，第三代地基和天基引力波探测同样无法对 dCS 引力给出有效的限制^[98] [见表格 (4.1)]。

引力波的信号提取和参数估计都严重依赖波形模板的精确性，更精确的波形模板可以提高引力波事件的信噪比，给出对模型参数更强约束。基于这一目标，本文对 dCS 引力下双黑洞系统的建模和引力波形的计算进行了改进和推广。在第3章中，我们在后牛顿框架下对修正的 MPD 方程进行了处理，得到了双黑洞系统的运动方程 $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$ (3.31) 和进动方程 $d\mathbf{S}_1 = \boldsymbol{\Omega}_{12} \times \mathbf{S}_1$ (3.38)。对修正的线性化引力场方程进行了多极展开和推迟积分，得到了辐射波形的一般表达式 ϑ (3.61) 和 \bar{k}_{ij} (3.80)。在辐射阶段，引力场和标量场解耦，一方面造成了 dCS 理论中引力波不存在额外极化模式，另一方面导致了引力波在产生阶段不会出现振幅双折射效应^[92]。这更加重了我们检验宇称对称性的难度。

在第4章中，我们关注了一类自旋平行的特殊双黑洞系统，其中自旋进动消失，双星的运动局限在轨道平面内。我们在 dCS 引力中推广了准开普勒参数化方案，以描述双星在轨道平面上的一般运动。基于运动方程的求解，我们解析

地给出了双黑洞辐射的引力波形、能量和角动量损失、轨道的辐射衰减，并在小偏心率近似下给出可直接用于引力波信号提取和参数估计的频域信号 $\tilde{H}(f)$ (4.111)^[100]。通过广义相对论波形与 dCS 波形之间不匹配度的计算，我们发现，偏心率的引入有助于改善对宇称破缺的检验能力，但对第二代引力波探测器仍然具有挑战性 [见图 (4.8)]。

第5章对自旋进动的双黑洞系统进行了初步研究。自旋进动系统的运动可以拆分为轨道平面上的运动和轨道平面的演化，本文主要关注轨道运动部分。我们采用多尺度分析对两部分运动在不同演化时标上进行了分离，引入平均化轨道角动量作为新的守恒量，推广和改进了准开普勒参数化方案，最终建立起双星在轨道参考系中运动的描述 (5.25, 5.26, 5.27)，构建了守恒部分的引力波形 (5.33, 5.34)，并研究了轨道根数的辐射演化 (5.42, 5.43)。最后我们发现 dCS 引力中的标量单极辐射会破坏零偏心率轨道的稳定性，导致双星系统在演化末期总是带有一个残余偏心率 (5.44)，为未来区分广义相对论和宇称破缺理论提供一种可能的判断方法。

我们在未来的研究目标仍然是借助引力波观测给出引力宇称对称性更严格的检验。在波源建模和波形计算层面上，首先完成轨道偏心率效应和自旋进动效应的结合，并最终建立对一般轨道上双黑洞系统运动、引力辐射和辐射演化的描述。这有望成为第一个在修改引力框架下对自旋进动-偏心率轨道双黑洞系统的完整建模。并将相关的方法继续推广一般宇称破缺的标量-张量引力^[75]和 Nieh-Yan 引力^[66-67]等其他带有宇称破缺效应的理论中。进一步地，我们将基于新提出的波形模板，使用现有的引力波探测数据重新进行执行 Bayes 推断，并有望实现对 dCS 耦合参数和其他宇称破缺引力理论的更严格约束。再进一步地，我们还将评估未来引力波探测器观测引力宇称对称性的能力。总之，本工作和一系列未来计划旨在通过改进波源建模和波形模板构建，并结合实际观测以获得更严格的引力宇称对称性检验

对宇称破缺引力中引力波形模板的构建也不应局限在恒星质量双黑洞系统。随着引力波探测技术的发展进步，更宽频段的引力波信号有望在未来几十年中被探测到。例如，极端质量比旋近 (extreme mass ratio inspiral, EMRI) 系统是天基引力波探测器的主要目标源之一^[28]。广义相对论的偏离会在长时标的信号探测中累积放大，从而更容易地被观测到。本文所使用的运动方程可以进一步推广到 EMRI 系统，用来刻画旋近小天体的轨道和进动，结合黑洞扰动理论^[222-224]给出引力波形，并用于探测器检验宇称对称性能力的定量估计。

最后，引力波形的构建应当逐步地超越后牛顿框架。因为双黑洞并合过程的主要引力波辐射来自并合瞬间前后，在这个时段内后牛顿近似失效，引力场的行为变得高度非线性化。目前，Okounkova 等人^[225-227]已经在数值相对论框架下

对 dCS 双星系统进行了初步探索。数值相对论模拟的成功突破将推动我们在宇称破缺引力下理解强场的行为，并且在与观测数据的结合中给出更加坚实可靠的限制和约束。

参考文献

- [1] Einstein, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper[J/OL]. Annalen der Physik, 1905, 322 (10): 891-921. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053221004>. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [2] Einstein, A. Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes[J/OL]. Annalen der Physik, 1911, 340(10): 898-908. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19113401005>. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19113401005>.
- [3] S. Weinberg. Gravitation and Cosmology[M]. Inc: John Wiley & Sons, 1972.
- [4] Einstein, Albert. Die Feldgleichungen der Gravitation[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1915: 844-847.
- [5] Einstein, Albert. Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916: 688-696.
- [6] Einstein, Albert. Über Gravitationswellen[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1918: 154-167.
- [7] Einstein, Albert. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1915: 831-839.
- [8] Hoyle, C. D. and others. Submillimeter Test of the Gravitational Inverse-Square Law: A Search for “Large” Extra Dimensions[J/OL]. Phys Rev Lett, 2001, 86: 1418-1421. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.1418>.
- [9] Fabrizio De Marchi and Gael Cascioli. Testing general relativity in the solar system: present and future perspectives[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2020, 37(9): 095007. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab6ae0>.
- [10] Shapiro, I. I. Solar system tests of general relativity: recent results and present plans[C]// Ashby N, Bartlett D F, Wyss W. General Relativity and Gravitation, 1989. 1990: 313.
- [11] Emanuele Berti and others. Testing general relativity with present and future astrophysical observations[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2015, 32(24): 243001. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/24/243001>.
- [12] Stairs, Ingrid H. Testing general relativity with pulsar timing[J]. Living Reviews in Relativity, 2003, 6: 1-49.
- [13] Kramer, Michael and others. Tests of general relativity from timing the double pulsar[J/OL]. science, 2006, 314(5796): 97-102. DOI: [10.1126/science.1132305](https://doi.org/10.1126/science.1132305).

- [14] Hulse, R. A. and Taylor, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system.[J/OL]. *Astrophysical Journal letters*, 1975, 195: 51-53. DOI: [10.1086/181708](https://doi.org/10.1086/181708).
- [15] Ishak, Mustapha. Testing general relativity in cosmology[J]. *Living Reviews in Relativity*, 2019, 22: 1-204.
- [16] Uzan, Jean-Philippe. Testing general relativity: from local to cosmological scales[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, 369(1957): 5042-5057.
- [17] Weber, J. Detection and Generation of Gravitational Waves[J/OL]. *Phys Rev*, 1960, 117: 306-313. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.306>.
- [18] Weber, J. Evidence for Discovery of Gravitational Radiation[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 1969, 22: 1320-1324. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1320>.
- [19] Logan, Jonothan L. Gravitational waves—a progress report[J/OL]. *Physics Today*, 1973, 26 (3): 44-52. <https://doi.org/10.1063/1.3127984>.
- [20] Weiss, R. Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna, Quarterly Report of the Research Laboratory for Electronics[M]. MIT Report, 1972.
- [21] Thorne, K. S. Gravitational radiation.[M]//Hawking S W, Israel W. *Three Hundred Years of Gravitation*. 1987: 330-458.
- [22] Alex Abramovici, et al. LIGO: The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory [J/OL]. *Science*, 1992, 256(5055): 325-333. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.256.5055.325>.
- [23] Catherine Nguyen. Status of the Advanced Virgo gravitational-wave detector[A/OL]. 2021. arXiv: [2105.09247](https://arxiv.org/abs/2105.09247). <https://arxiv.org/abs/2105.09247>.
- [24] Akutsu T, et al. KAGRA: 2.5 Generation Interferometric Gravitational Wave Detector[J/OL]. *Nature Astron*, 2019, 3(1): 35-40. DOI: [10.1038/s41550-018-0658-y](https://doi.org/10.1038/s41550-018-0658-y).
- [25] David Reitze, OTHER. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO[A/OL]. 2019. arXiv: [1907.04833](https://arxiv.org/abs/1907.04833). <https://arxiv.org/abs/1907.04833>.
- [26] Punturo, M, et al. The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory [J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, 27(19): 194002. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002>.
- [27] Amaro-Seoane Pau, et al. Laser Interferometer Space Antenna[A/OL]. 2017: arXiv:1702.00786. arXiv: [1702.00786](https://arxiv.org/abs/1702.00786).
- [28] Luo Jun, et al. TianQin: a space-borne gravitational wave detector[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(3): 035010. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/3/035010>.
- [29] Luo, Ziren and Wang, Yan and Wu, Yueliang and Hu, Wenrui and Jin, Gang. The Taiji program: A concise overview[J/OL]. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*,

- 2020, 2021(5): 05A108. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa083>.
- [30] Maggiore, Michele. Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments: Vol. 1[M]. Oxford university press, 2008.
- [31] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration. A guide to LIGO–Virgo detector noise and extraction of transient gravitational-wave signals[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2020, 37(5): 055002. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab685e>.
- [32] Shibata, Masaru. Numerical Relativity: Vol. 1[M]. World Scientific, 2015.
- [33] Palenzuela, Carlos. Introduction to Numerical Relativity[J/OL]. Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 2020, 7. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fspas.2020.00058>.
- [34] Pretorius, Frans. Evolution of Binary Black-Hole Spacetimes[J/OL]. Phys Rev Lett, 2005, 95: 121101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.121101>.
- [35] Baker, John G. and Centrella, Joan and Choi, Dae-Il and Koppitz, Michael and van Meter, James. Gravitational-Wave Extraction from an Inspirling Configuration of Merging Black Holes[J/OL]. Phys Rev Lett, 2006, 96: 111102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.111102>.
- [36] Healy, James and Lousto, Carlos O and Zlochower, Yosef and Campanelli, Manuela. The RIT binary black hole simulations catalog[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2017, 34 (22): 224001. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aa91b1>.
- [37] Boyle, Michael, et al. The SXS collaboration catalog of binary black hole simulations[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2019, 36(19): 195006. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab34e2>.
- [38] Blanchet, L. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries.[J/OL]. Living Rev Relativ, 2014, 17. DOI: <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-2>.
- [39] Blanchet, Luc. Post-Newtonian theory for gravitational waves[J]. Living Reviews in Relativity, 2024, 27(1): 4.
- [40] Buonanno, A. and Damour, T. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics[J/OL]. Phys Rev D, 1999, 59: 084006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.084006>.
- [41] Husa, Sascha, et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal[J/OL]. Phys Rev D, 2016, 93: 044006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.044006>.
- [42] Abbott B. P, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger [J/OL]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 061102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [43] Abbott, B. P., et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron

- Star Inspiral[J/OL]. Phys Rev Lett, 2017, 119: 161101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>.
- [44] Abbott, B. P., et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs[J/OL]. Phys Rev X, 2019, 9: 031040. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031040>.
- [45] Abbott, R., et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run[J/OL]. Phys Rev X, 2021, 11: 021053. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021053>.
- [46] R. Abbott, et al. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run[A]. 2022. arXiv: [2108.01045](https://arxiv.org/abs/2108.01045).
- [47] Abbott, R., OTHER. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run[A]. 2021: arXiv:2111.03606. arXiv: [2111.03606](https://arxiv.org/abs/2111.03606).
- [48] Abbott, B. P., et al. Tests of General Relativity with GW150914[J/OL]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 221101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.221101>.
- [49] Abbott, B. P., et al. Tests of General Relativity with GW170817[J/OL]. Phys Rev Lett, 2019, 123: 011102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.011102>.
- [50] Abbott, B. P., et al. Tests of general relativity with the binary black hole signals from the LIGO-Virgo catalog GWTC-1[J/OL]. Phys Rev D, 2019, 100: 104036. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.104036>.
- [51] Abbott, R., et al. Tests of general relativity with binary black holes from the second LIGO-Virgo gravitational-wave transient catalog[J/OL]. Phys Rev D, 2021, 103: 122002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.122002>.
- [52] Abbott, R., et al. Tests of General Relativity with GWTC-3[A]. 2021: arXiv:2112.06861. arXiv: [2112.06861](https://arxiv.org/abs/2112.06861).
- [53] Kiefer, C. Why Quantum Gravity?[M/OL]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007: 123-130. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71117-9_7.
- [54] Penrose, Roger. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities[J/OL]. Phys Rev Lett, 1965, 14: 57-59. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [55] Sofue, Yoshiaki and Rubin, Vera. Rotation curves of spiral galaxies[J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 2001, 39(1): 137-174.
- [56] Riess, Adam G, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant[J]. The astronomical journal, 1998, 116(3): 1009.
- [57] Garrett, Katherine and Dūda, Gintaras. Dark matter: A primer[J]. Advances in Astronomy,

- 2011, 2011(1): 968283.
- [58] Frieman, Joshua A and Turner, Michael S and Huterer, Dragan. Dark energy and the accelerating universe[J]. *Annu Rev Astron Astrophys*, 2008, 46(1): 385-432.
- [59] Lovelock, David. The Einstein Tensor and Its Generalizations[J/OL]. *Journal of Mathematical Physics*, 1971, 12(3): 498-501. <https://doi.org/10.1063/1.1665613>.
- [60] Brans, C. and Dicke, R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation[J/OL]. *Phys Rev*, 1961, 124: 925-935. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>.
- [61] Horndeski, Gregory Walter. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 1974, 10: 363-384.
- [62] Jacobson, Ted and Mattingly, David. Gravity with a dynamical preferred frame[J/OL]. *Phys Rev D*, 2001, 64: 024028. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.024028>.
- [63] Sotiriou, Thomas P. and Faraoni, Valerio. $f(R)$ theories of gravity[J/OL]. *Rev Mod Phys*, 2010, 82: 451-497. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>.
- [64] Hayashi, Kenji and Shirafuji, Takeshi. New general relativity[J/OL]. *Phys Rev D*, 1979, 19: 3524-3553. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.3524>.
- [65] Cai, Yi-Fu and Capozziello, Salvatore and De Laurentis, Mariafelicia and Saridakis, Emmanuel N. $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology[J/OL]. *Reports on Progress in Physics*, 2016, 79(10): 106901. <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/10/106901>.
- [66] Mingzhe Li and Haomin Rao and Dehao Zhao. A simple parity violating gravity model without ghost instability[J/OL]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020, 2020(11): 023. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/11/023>.
- [67] Li, Mingzhe and Rao, Haomin and Tong, Yeheng. Revisiting a parity violating gravity model without ghost instability: Local Lorentz variance[J/OL]. *Phys Rev D*, 2021, 104: 084077. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.084077>.
- [68] Lee, T. D. and Yang, C. N. Question of Parity Conservation in Weak Interactions[J/OL]. *Phys Rev*, 1956, 104: 254-258. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.254>.
- [69] Wu, C. S. and Ambler, E. and Hayward, R. W. and Hoppes, D. D. and Hudson, R. P. Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay[J/OL]. *Phys Rev*, 1957, 105: 1413-1415. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1413>.
- [70] Deser, S. and Jackiw, R. and Templeton, S. Three-Dimensional Massive Gauge Theories [J/OL]. *Phys Rev Lett*, 1982, 48: 975-978. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.975>.
- [71] Jackiw, R. and Pi, S.-Y. Chern-Simons modification of general relativity[J/OL]. *Phys Rev D*, 2003, 68: 104012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.104012>.
- [72] Stephon Alexander and Nicolás Yunes. Chern – Simons modified general relativity[J/OL].

- Physics Reports, 2009, 480(1): 1-55. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.07.002>.
- [73] Crisostomi, M. and Noui, K. and Charmousis, C. and Langlois, D. Beyond Lovelock gravity: Higher derivative metric theories[J/OL]. Phys Rev D, 2018, 97: 044034. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.044034>.
- [74] Zhao, Wen, et al. Waveform of gravitational waves in the general parity-violating gravities [J/OL]. Phys Rev D, 2020, 101: 024002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.024002>.
- [75] Qiao, Jin and others. Waveform of gravitational waves in the ghost-free parity-violating gravities[J/OL]. Phys Rev D, 2019, 100: 124058. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.124058>.
- [76] Qiao, Jin and Zhu, Tao and Zhao, Wen and Wang, Anzhong. Polarized primordial gravitational waves in the ghost-free parity-violating gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2020, 101(4): 043528. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.043528](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.043528).
- [77] Qiao, Jin, et al. Testing parity symmetry of gravity with gravitational waves[J/OL]. Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 2023, 9. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fspas.2022.1109086>.
- [78] Wang, Anzhong and Wu, Qiang and Zhao, Wen and Zhu, Tao. Polarizing primordial gravitational waves by parity violation[J/OL]. Phys Rev D, 2013, 87(10): 103512. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.103512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.103512).
- [79] Zhu, Tao and Zhao, Wen and Huang, Yongqing and Wang, Anzhong and Wu, Qiang. Effects of parity violation on non-Gaussianity of primordial gravitational waves in Hořava-Lifshitz gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2013, 88(6): 063508. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.063508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.063508).
- [80] Mingzhe Li and Dehao Zhao. A simple parity violating model in the symmetric teleparallel gravity and its cosmological perturbations[J/OL]. Physics Letters B, 2022, 827: 136968. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269322001022>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.136968>.
- [81] Li, Mingzhe and Tong, Yeheng and Zhao, Dehao. Possible consistent model of parity violations in the symmetric teleparallel gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2022, 105: 104002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.104002>.
- [82] Okounkova, Maria, et al. Constraining gravitational wave amplitude birefringence and Chern-Simons gravity with GWTC-2[J/OL]. Phys Rev D, 2022, 106: 044067. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.044067>.
- [83] Zhao, W, et al. Model-independent test of the parity symmetry of gravity with gravitational waves[J/OL]. Eur Phys J C, 2020, 80: 630. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8211-4>.

- [84] Wang, Yi-Fan and Niu, Rui and Zhu, Tao and Zhao, Wen. Gravitational Wave Implications for the Parity Symmetry of Gravity in the High Energy Region[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 2021, 908(1): 58. DOI: [10.3847/1538-4357/abd7a6](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abd7a6).
- [85] Wang, Yi-Fan and Brown, Stephanie M. and Shao, Lijing and Zhao, Wen. Tests of gravitational-wave birefringence with the open gravitational-wave catalog[J/OL]. *Phys Rev D*, 2022, 106(8): 084005. DOI: [10.1103/PhysRevD.106.084005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.084005).
- [86] Wu, Qiang, et al. Constraints on the Nieh-Yan modified teleparallel gravity with gravitational waves[J/OL]. *Phys Rev D*, 2022, 105: 024035. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.024035>.
- [87] Zhao, Zhi-Chao and Cao, Zhoujian and Wang, Sai. Search for the Birefringence of Gravitational Waves with the Third Observing Run of Advanced LIGO-Virgo[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 2022, 930(2): 139. DOI: [10.3847/1538-4357/ac62d3](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac62d3).
- [88] Ali-Haïmoud, Yacine and Chen, Yanbei. Slowly rotating stars and black holes in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. *Phys Rev D*, 2011, 84: 124033. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.124033>.
- [89] Yunes, Nicolás and Pretorius, Frans. Dynamical Chern-Simons modified gravity: Spinning black holes in the slow-rotation approximation[J/OL]. *Phys Rev D*, 2009, 79: 084043. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.084043>.
- [90] Yagi, Kent and Yunes, Nicolás and Tanaka, Takahiro. Slowly rotating black holes in dynamical Chern-Simons gravity: Deformation quadratic in the spin[J/OL]. *Phys Rev D*, 2012, 86: 044037. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.044037>.
- [91] E. Poisson and C. M. Will. *Gravity*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [92] Zhao Li and Jin Qiao and Tan Liu and Tao Zhu and Wen Zhao. Gravitational waveform and polarization from binary black hole inspiral in dynamical Chern-Simons gravity: from generation to propagation[J/OL]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2023, 2023(04): 006. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2023/04/006>.
- [93] Yagi, Kent, et al. Post-Newtonian, quasicircular binary inspirals in quadratic modified gravity [J/OL]. *Phys Rev D*, 2012, 85: 064022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.064022>.
- [94] Yagi, Kent and Yunes, Nicolás and Tanaka, Takahiro. Gravitational Waves from Quasicircular Black-Hole Binaries in Dynamical Chern-Simons Gravity[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 251105. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.251105>.
- [95] Nair, Remya and Perkins, Scott and Silva, Hector O. and Yunes, Nicolás. Fundamental Physics Implications for Higher-Curvature Theories from Binary Black Hole Signals in the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2019, 123: 191101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.191101>.

- [//link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.191101](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.191101).
- [96] Perkins, Scott E. and Nair, Remya and Silva, Hector O. and Yunes, Nicolás. Improved gravitational-wave constraints on higher-order curvature theories of gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2021, 104: 024060. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.024060>.
- [97] Wang, Hai-Tian, et al. Tight constraints on Einstein-dilation-Gauss-Bonnet gravity from GW190412 and GW190814[J/OL]. Phys Rev D, 2021, 104: 024015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.024015>.
- [98] Shi, Changfu and Ji, Mujie and Zhang, Jiandong and Mei, Jianwei. Testing general relativity with TianQin: The prospect of using the inspiral signals of black hole binaries[J/OL]. Phys Rev D, 2023, 108: 024030. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.024030>.
- [99] Wagle, Pratik and Saffer, Alexander and Yunes, Nicolás. Polarization modes of gravitational waves in quadratic gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2019, 100: 124007. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.124007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.124007).
- [100] Li, Zhao, et al. Gravitational radiation from eccentric binary black hole system in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2024, 2024 (05): 073. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2024/05/073>.
- [101] Gergely, László Á. Spin-spin effects in radiating compact binaries[J/OL]. Phys Rev D, 1999, 61: 024035. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.024035>.
- [102] Gergely, László Á. Second post-Newtonian radiative evolution of the relative orientations of angular momenta in spinning compact binaries[J/OL]. Phys Rev D, 2000, 62: 024007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.024007>.
- [103] Gergely, László Á. and Keresztes, Zoltán. Gravitational radiation reaction in compact binary systems: Contribution of the quadrupole-monopole interaction[J/OL]. Phys Rev D, 2003, 67: 024020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.024020>.
- [104] Klein, Antoine and Jetzer, Philippe. Spin effects in the phasing of gravitational waves from binaries on eccentric orbits[J/OL]. Phys Rev D, 2010, 81: 124001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.124001>.
- [105] Klein, Antoine and Boetzel, Yannick and Gopakumar, Achamveedu and Jetzer, Philippe and de Vittori, Lorenzo. Fourier domain gravitational waveforms for precessing eccentric binaries [J/OL]. Phys Rev D, 2018, 98: 104043. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.104043>.
- [106] Loutrel, Nicholas and Yunes, Nicolás. Parity violation in spin-precessing binaries: Gravitational waves from the inspiral of black holes in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2022, 106: 064009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.064009>.
- [107] Loutrel, Nicholas and Pani, Paolo and Yunes, Nicolás. Parametrized post-Einsteinian frame-

- work for precessing binaries[J/OL]. Phys Rev D, 2023, 107: 044046. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.044046>.
- [108] Yagi, Kent and Yang, Huan. Probing gravitational parity violation with gravitational waves from stellar-mass black hole binaries[J/OL]. Phys Rev D, 2018, 97: 104018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.104018>.
- [109] Schwarzschild, Karl. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie[J]. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916: 189-196.
- [110] Kerr, Roy P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics[J/OL]. Phys Rev Lett, 1963, 11: 237-238. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>.
- [111] Boyer, Robert H. and Lindquist, Richard W. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric [J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 1967, 8(2): 265-281. DOI: [10.1063/1.1705193](https://doi.org/10.1063/1.1705193).
- [112] Konno, Kohkichi and Matsuyama, Toyoki and Tanda, Satoshi. Rotating Black Hole in Extended Chern-Simons Modified Gravity[J/OL]. Progress of Theoretical Physics, 2009, 122 (2): 561-568. <https://doi.org/10.1143/PTP.122.561>.
- [113] Alexander, Stephon and Yunes, Nicolás. Parametrized post-Newtonian expansion of Chern-Simons gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2007, 75: 124022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.124022>.
- [114] Alexander, Stephon and Yunes, Nicolas. New Post-Newtonian Parameter to Test Chern-Simons Gravity[J/OL]. Phys Rev Lett, 2007, 99: 241101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.241101>.
- [115] Stein, Leo C. Rapidly rotating black holes in dynamical Chern-Simons gravity: Decoupling limit solutions and breakdown[J/OL]. Phys Rev D, 2014, 90: 044061. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.044061>.
- [116] Terence Delsate and Carlos Herdeiro and Eugen Radu. Non-perturbative spinning black holes in dynamical Chern – Simons gravity[J/OL]. Physics Letters B, 2018, 787: 8-15. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318308001>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.060>.
- [117] Regge, Tullio and Wheeler, John A. Stability of a Schwarzschild Singularity[J/OL]. Phys Rev, 1957, 108: 1063-1069. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.1063>.
- [118] Zerilli, Frank J. Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics[J/OL]. Phys Rev D, 1970, 2: 2141-2160. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.2141>.
- [119] C. W. Misner and K. S. Thorne and J. A. Wheeler. Gravitation[M]. New York: W. H. Freeman

- and Company, 1971.
- [120] Thorne, Kip S. Multipole expansions of gravitational radiation[J/OL]. *Rev Mod Phys*, 1980, 52: 299-339. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.299>.
- [121] Ciufolini, Ignazio and Pavlis, Erricos C. A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense–Thirring effect[J]. *Nature*, 2004, 431(7011): 958-960.
- [122] Everitt, C. W. F. and others. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 221101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.221101>.
- [123] Lyne, AG. A review of the double pulsar-psr j0737-3039[J]. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 2006, 6(S2): 162.
- [124] Burgay, Marta, et al. An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system[J]. *Nature*, 2003, 426(6966): 531-533.
- [125] Yagi, Kent, et al. Erratum: Post-Newtonian, quasicircular binary inspirals in quadratic modified gravity [Phys. Rev. D 85, 064022 (2012)][J/OL]. *Phys Rev D*, 2016, 93: 029902. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.029902>.
- [126] Landau, L and Lifchitz, E.”. *Field theory*[M]. France: Editions Ellipses, 2004.
- [127] Goldberger, Walter D. and Rothstein, Ira Z. Effective field theory of gravity for extended objects[J/OL]. *Phys Rev D*, 2006, 73: 104029. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.104029>.
- [128] Adrien Druart. The Motion of Test Bodies around Kerr Black Holes[A/OL]. 2023. arXiv: 2307.02589. <https://arxiv.org/abs/2307.02589>.
- [129] Steinhoff, J. Canonical formulation of spin in general relativity[J/OL]. *Annalen der Physik*, 2011, 523(4): 296-353. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.201000178>.
- [130] Tulczyjew, W. Motion of multipole particles in general relativity theory[J]. *Acta Phys Pol*, 1959, 18(393): 94.
- [131] Dixon, William G. Dynamics of extended bodies in general relativity. I. Momentum and angular momentum[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1970, 314(1519): 499-527.
- [132] Dixon, William G. Dynamics of extended bodies in general relativity-II. Moments of the charge-current vector[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1970, 319(1539): 509-547.
- [133] Dixon, William G. Dynamics of extended bodies in general relativity III. Equations of motion [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1974, 277(1264): 59-119.
- [134] Loutrel, Nicholas and Tanaka, Takahiro and Yunes, Nicolás. Spin-precessing black hole

- binaries in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2018, 98: 064020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.064020>.
- [135] Mathisson, Myron. Republication of: New mechanics of material systems[J]. General relativity and gravitation, 2010, 42(4): 1011-1048.
- [136] Papapetrou, Achille. Spinning test-particles in general relativity. I[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1951, 209(1097): 248-258.
- [137] Corinaldesi, Ernesto and Papapetrou, Achille. Spinning test-particles in general relativity. II [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1951, 209(1097): 259-268.
- [138] Bini, Donato and Geralico, Andrea. Deviation of quadrupolar bodies from geodesic motion in a Kerr spacetime[J/OL]. Phys Rev D, 2014, 89: 044013. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.044013>.
- [139] A. Einstein and L. Infeld and B. Hoffmann. The Gravitational Equations and the Problem of Motion[J/OL]. Annals of Mathematics, 1938, 39(1): 65-100[2023-08-09]. <http://www.jstor.org/stable/1968714>.
- [140] Peters, P. C. and Mathews, J. Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit [J/OL]. Phys Rev, 1963, 131: 435-440. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [141] Yunes, Nicolas and Arun, K. G. and Berti, Emanuele and Will, Clifford M. Post-circular expansion of eccentric binary inspirals: Fourier-domain waveforms in the stationary phase approximation[J/OL]. Phys Rev D, 2009, 80: 084001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084001>.
- [142] Damour, Thibault. Gravitational radiation and the motion of compact bodies.[J]. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 1983, 124: 59-144.
- [143] Blanchet, Luc and Damour, Thibault and Iyer, Bala R. Gravitational waves from inspiralling compact binaries: Energy loss and waveform to second-post-Newtonian order[J/OL]. Phys Rev D, 1995, 51: 5360-5386. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.5360>.
- [144] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume and Ponsot, Bénédicte. Gravitational field and equations of motion of compact binaries to $5/2$ post-Newtonian order[J/OL]. Phys Rev D, 1998, 58: 124002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.124002>.
- [145] K G Arun and Luc Blanchet and Bala R Iyer and Moh'd S S Qusailah. The 2.5PN gravitational wave polarizations from inspiralling compact binaries in circular orbits[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 2004, 21(15): 3771. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/15/010>.
- [146] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume. General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order[J/OL]. Phys Rev D, 2001, 63: 062005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.062005>.

- 0.1103/PhysRevD.63.062005.
- [147] Blanchet, Luc and Iyer, Bala R. and Joguet, Benoit. Gravitational waves from inspiraling compact binaries: Energy flux to third post-Newtonian order[J/OL]. *Phys Rev D*, 2002, 65: 064005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.064005>.
- [148] Luc Blanchet and Guillaume Faye and Bala R Iyer and Siddhartha Sinha. The third post-Newtonian gravitational wave polarizations and associated spherical harmonic modes for inspiralling compact binaries in quasi-circular orbits[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2008, 25(16): 165003. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/25/16/165003>.
- [149] Guillaume Faye and Sylvain Marsat and Luc Blanchet and Bala R Iyer. The third and a half-post-Newtonian gravitational wave quadrupole mode for quasi-circular inspiralling compact binaries[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2012, 29(17): 175004. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/17/175004>.
- [150] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume and Iyer, Bala R. and Joguet, Benoit. Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to $7/2$ post-Newtonian order[J/OL]. *Phys Rev D*, 2002, 65: 061501. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.061501>.
- [151] Arun, K. G. and Iyer, Bala R and Sathyaprakash, B. S. and Sundararajan, Pranesh A. Parameter estimation of inspiralling compact binaries using 3.5 post-Newtonian gravitational wave phasing: The nonspinning case[J/OL]. *Phys Rev D*, 2005, 71: 084008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.084008>.
- [152] Tanguy Marchand and Quentin Henry and François Larrouturou and Sylvain Marsat and Guillaume Faye and Luc Blanchet. The mass quadrupole moment of compact binary systems at the fourth post-Newtonian order[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2020, 37(21): 215006. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab9ce1>.
- [153] François Larrouturou and Luc Blanchet and Quentin Henry and Guillaume Faye. The quadrupole moment of compact binaries to the fourth post-Newtonian order: II. Dimensional regularization and renormalization[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2022, 39(11): 115008. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac5ba0>.
- [154] Luc Blanchet and Guillaume Faye and François Larrouturou. The quadrupole moment of compact binaries to the fourth post-Newtonian order: from source to canonical moment [J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2022, 39(19): 195003. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac840c>.
- [155] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume and Henry, Quentin and Larrouturou, François and Trestini, David. Gravitational-wave flux and quadrupole modes from quasicircular nonspinning compact binaries to the fourth post-Newtonian order[J/OL]. *Phys Rev D*, 2023, 108: 064041. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.108.064041>.

- [156] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume and Henry, Quentin and Larrouturou, François and Trestini, David. Gravitational-Wave Phasing of Quasicircular Compact Binary Systems to the Fourth-and-a-Half Post-Newtonian Order[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2023, 131: 121402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.121402>.
- [157] Kidder, Lawrence E. Coalescing binary systems of compact objects to (post)^{5/2}-Newtonian order. V. Spin effects[J/OL]. *Phys Rev D*, 1995, 52: 821-847. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.821>.
- [158] Faye, Guillaume and Blanchet, Luc and Buonanno, Alessandra. Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries. I. Equations of motion[J/OL]. *Phys Rev D*, 2006, 74: 104033. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.104033>.
- [159] Blanchet, Luc and Buonanno, Alessandra and Faye, Guillaume. Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries. II. Radiation field[J/OL]. *Phys Rev D*, 2006, 74: 104034. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.104034>.
- [160] Alejandro Bohé and Sylvain Marsat and Luc Blanchet. Next-to-next-to-leading order spin-orbit effects in the gravitational wave flux and orbital phasing of compact binaries[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2013, 30(13): 135009. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/13/135009>.
- [161] Thorne, Kip S. and Hartle, James B. Laws of motion and precession for black holes and other bodies[J/OL]. *Phys Rev D*, 1985, 31: 1815-1837. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.1815>.
- [162] Alejandro Bohé and Guillaume Faye and Sylvain Marsat and Edward K Porter. Quadratic-in-spin effects in the orbital dynamics and gravitational-wave energy flux of compact binaries at the 3PN order[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2015, 32(19): 195010. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/19/195010>.
- [163] Buonanno, Alessandra and Faye, Guillaume and Hinderer, Tanja. Spin effects on gravitational waves from inspiralling compact binaries at second post-Newtonian order[J/OL]. *Phys Rev D*, 2013, 87: 044009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.044009>.
- [164] Cho, Gihyuk and Pardo, Brian and Porto, Rafael A. Gravitational radiation from inspiralling compact objects: Spin-spin effects completed at the next-to-leading post-Newtonian order [J/OL]. *Phys Rev D*, 2021, 104: 024037. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.024037>.
- [165] Cho, Gihyuk and Porto, Rafael A. and Yang, Zixin. [A]. 2022: arXiv:2201.05138. arXiv: [2201.05138](https://arxiv.org/abs/2201.05138).
- [166] Chatziioannou, Katerina and Klein, Antoine and Yunes, Nicolás and Cornish, Neil. Constructing gravitational waves from generic spin-precessing compact binary inspirals[J/OL].

- Phys Rev D, 2017, 95: 104004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.104004>.
- [167] Buonanno, Alessandra and Iyer, Bala R. and Ochsner, Evan and Pan, Yi and Sathyaprakash, B. S. Comparison of post-Newtonian templates for compact binary inspiral signals in gravitational-wave detectors[J/OL]. Phys Rev D, 2009, 80: 084043. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084043>.
- [168] Zhang, Xing, et al. Testing Brans-Dicke gravity using the Einstein Telescope[J/OL]. Phys Rev D, 2017, 95: 124008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.124008>.
- [169] Liu, Tan and Zhao, Wen and Wang, Yan. Gravitational waveforms from the quasicircular inspiral of compact binaries in massive Brans-Dicke theory[J/OL]. Phys Rev D, 2020, 102: 124035. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.124035>.
- [170] Zhang, Chao, et al. Gravitational waves from the quasicircular inspiral of compact binaries in Einstein-aether theory[J/OL]. Phys Rev D, 2020, 101: 044002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.044002>.
- [171] Zhang, Xing and Liu, Tan and Zhao, Wen. Gravitational radiation from compact binary systems in screened modified gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2017, 95: 104027. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.104027>.
- [172] Xing Zhang, et al. Angular momentum loss for eccentric compact binary in screened modified gravity[J/OL]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2019, 2019(01): 019. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/01/019>.
- [173] Liu, Tan, et al. Waveforms of compact binary inspiral gravitational radiation in screened modified gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2018, 98: 083023. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.083023>.
- [174] Chowdhuri, Abhishek and Bhattacharyya, Arpan. Study of eccentric binaries in Horndeski gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2022, 106: 064046. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.064046>.
- [175] Blanchet, Luc and Faye, Guillaume. Hadamard regularization[J/OL]. Journal of Mathematical Physics, 2000, 41(11): 7675-7714. <https://doi.org/10.1063/1.1308506>.
- [176] L Blanchet and G Schafer. Gravitational wave tails and binary star systems[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 1993, 10(12): 2699. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/10/12/026>.
- [177] Blanchet, Luc and Sathyaprakash, B. S. Detecting a Tail Effect in Gravitational-Wave Experiments[J/OL]. Phys Rev Lett, 1995, 74: 1067-1070. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.1067>.
- [178] Luc Blanchet. Gravitational-wave tails of tails[J/OL]. Classical and Quantum Gravity, 1998, 15(1): 113. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/15/1/009>.
- [179] Chin, Siu A. A truly elementary proof of Bertrand's theorem[J/OL]. American Journal of

- Physics, 2015, 83(4): 320-323. <https://doi.org/10.1119/1.4901974>.
- [180] Damour, T. and Deruelle, N. General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion.[J]. *Annales de L'Institut Henri Poincare Section (A) Physique Theorique*, 1985, 43(1): 107-132.
- [181] Damour, T. and Schafer, G. Higher-order relativistic periastron advances and binary pulsars. [J/OL]. *Nuovo Cimento B Serie*, 1988, 101B(2): 127-176. DOI: [10.1007/BF02828697](https://doi.org/10.1007/BF02828697).
- [182] Norbert Wex. The second post-Newtonian motion of compact binary-star systems with spin [J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 1995, 12(4): 983. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/12/4/009>.
- [183] Memmesheimer, Raoul-Martin and Gopakumar, Achamveedu and Schäfer, Gerhard. Third post-Newtonian accurate generalized quasi-Keplerian parametrization for compact binaries in eccentric orbits[J/OL]. *Phys Rev D*, 2004, 70: 104011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.104011>.
- [184] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1983.
- [185] Will, Clifford M. The confrontation between general relativity and experiment[J/OL]. *Living Reviews in Relativity*, 2014, 17: 1-117. <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4>.
- [186] Gong, Yungui and Hou, Shaoqi. The Polarizations of Gravitational Waves[J/OL]. *Universe*, 2018, 4(8). <https://www.mdpi.com/2218-1997/4/8/85>. DOI: [10.3390/universe4080085](https://doi.org/10.3390/universe4080085).
- [187] Burke, William L and Thorne, Kip S. Gravitational radiation damping[C]//*Relativity: Proceedings of the Relativity Conference in the Midwest, held at Cincinnati, Ohio, June 2–6, 1969*. Springer, 1970: 209-228.
- [188] Weisberg, J. M. and Huang, Y. Relativistic measurements from timing the binary pulsar psr b1913+16[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 2016, 829(1): 55. <https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/829/1/55>.
- [189] Isaacson, Richard A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics[J/OL]. *Phys Rev*, 1968, 166: 1263-1271. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.166.1263>.
- [190] Isaacson, Richard A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor[J/OL]. *Phys Rev*, 1968, 166: 1272-1280. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.166.1272>.
- [191] Saffer, Alexander and Yunes, Nicolás and Yagi, Kent. The gravitational wave stress–energy (pseudo)-tensor in modified gravity[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, 35(5): 055011. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7de>.
- [192] Isobel Romero-Shaw and Paul D. Lasky and Eric Thrane and Juan Calderón Bustillo.

- GW190521: Orbital Eccentricity and Signatures of Dynamical Formation in a Binary Black Hole Merger Signal[J/OL]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2020, 903(1): L5. <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abbe26>.
- [193] Boetzel, Yannick and Susobhanan, Abhimanyu and Gopakumar, Achamveedu and Klein, Antoine and Jetzer, Philippe. Solving post-Newtonian accurate Kepler equation[J/OL]. *Phys Rev D*, 2017, 96: 044011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.044011>.
- [194] Roy, Archie E. *Orbital motion*[M]. CRC Press, 2020.
- [195] DLMF. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*[EB/OL]. <https://dlmf.nist.gov/>.
- [196] Tessmer, Manuel and Schäfer, Gerhard. Full-analytic frequency-domain first-post-Newtonian-accurate gravitational wave forms from eccentric compact binaries[J/OL]. *Phys Rev D*, 2010, 82: 124064. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.124064>.
- [197] Tanay, Sashwat and Haney, Maria and Gopakumar, Achamveedu. Frequency and time-domain inspiral templates for comparable mass compact binaries in eccentric orbits[J/OL]. *Phys Rev D*, 2016, 93: 064031. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.064031>.
- [198] Moore, Blake and Favata, Marc and Arun, K. G. and Mishra, Chandra Kant. Gravitational-wave phasing for low-eccentricity inspiralling compact binaries to 3PN order[J/OL]. *Phys Rev D*, 2016, 93: 124061. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.124061>.
- [199] Blake Moore and Nicolás Yunes. A 3PN Fourier domain waveform for non-spinning binaries with moderate eccentricity[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2019, 36(18): 185003. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab3778>.
- [200] Tiwari, Srishti and Gopakumar, Achamveedu and Haney, Maria and Hemantakumar, Phurailatapam. Ready-to-use Fourier domain templates for compact binaries inspiraling along moderately eccentric orbits[J/OL]. *Phys Rev D*, 2019, 99: 124008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.124008>.
- [201] M Tessmer and J Hartung and G Schäfer. Aligned spins: orbital elements, decaying orbits, and last stable circular orbit to high post-Newtonian orders[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2012, 30(1): 015007. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/30/1/015007>.
- [202] YUNES N, PRETORIUS F. Fundamental theoretical bias in gravitational wave astrophysics and the parametrized post-Einsteinian framework[J/OL]. *Phys Rev D*, 2009, 80: 122003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.122003>.
- [203] Chatziioannou, Katerina and Yunes, Nicolás and Cornish, Neil. Model-independent test of general relativity: An extended post-Einsteinian framework with complete polarization content[J/OL]. *Phys Rev D*, 2012, 86: 022004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.022004>.
- [204] Sampson, Laura and Cornish, Neil and Yunes, Nicolás. Gravitational wave tests of strong

- field general relativity with binary inspirals: Realistic injections and optimal model selection [J/OL]. *Phys Rev D*, 2013, 87: 102001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.102001>.
- [205] Loutrel, Nicholas and Yunes, Nicolás and Pretorius, Frans. Parametrized post-Einsteinian framework for gravitational wave bursts[J/OL]. *Phys Rev D*, 2014, 90: 104010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.104010>.
- [206] Tahura, Sharaban and Yagi, Kent. Parametrized post-Einsteinian gravitational waveforms in various modified theories of gravity[J/OL]. *Phys Rev D*, 2018, 98: 084042. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.084042>.
- [207] Blake Moore and Nicolás Yunes. Constraining gravity with eccentric gravitational waves: projected upper bounds and model selection[J/OL]. *Classical and Quantum Gravity*, 2020, 37(16): 165006. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab8bb6>.
- [208] Khan, Sebastian and Husa, Sascha and Hannam, Mark and Ohme, Frank and Pürrer, Michael and Forteza, Xisco Jiménez and Bohé, Alejandro. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era[J/OL]. *Phys Rev D*, 2016, 93: 044007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.044007>.
- [209] Alan M. Knee and Isobel M. Romero-Shaw and Paul D. Lasky and Jess McIver and Eric Thrane. A Rosetta Stone for Eccentric Gravitational Waveform Models[J/OL]. *The Astrophysical Journal*, 2022, 936(2): 172. <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac8b02>.
- [210] M. Hannam and C. Hoy and J.E.Thompson, et al. General-relativistic precession in a black-hole binary[J/OL]. *Nature*, 2022, 610: 652–655. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-05212-z>.
- [211] Silva, Hector, O, et al. Astrophysical and Theoretical Physics Implications from Multimessenger Neutron Star Observations[J/OL]. *Phys Rev Lett*, 2021, 126: 181101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.181101>.
- [212] Yagi, Kent and Yunes, Nicolas. I-Love-Q: Unexpected universal relations for neutron stars and quark stars[J]. *Science*, 2013, 341(6144): 365-368.
- [213] Yagi, Kent and Yunes, Nicolás. I-Love-Q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics[J/OL]. *Phys Rev D*, 2013, 88: 023009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.023009>.
- [214] Riley, Thomas E, et al. A NICER view of PSR J0030+ 0451: millisecond pulsar parameter estimation[J]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, 887(1): L21.
- [215] Miller, MC, et al. PSR J0030+ 0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter[J]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019, 887(1):

- L24.
- [216] Gendreau, Keith C, et al. The neutron star interior composition explorer (NICER): design and development[C]//Space telescopes and instrumentation 2016: Ultraviolet to gamma ray: Vol. 9905. SPIE, 2016: 420-435.
- [217] Yagi, Kent, et al. Isolated and binary neutron stars in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2013, 87: 084058. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.084058>.
- [218] Yuzhu Cui, et al. Precessing jet nozzle connecting to a spinning black hole in M87[J/OL]. Nature, 2023, 621: 711-715. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06479-6>.
- [219] Arun, K. G. and Buonanno, Alessandra and Faye, Guillaume and Ochsner, Evan. Higher-order spin effects in the amplitude and phase of gravitational waveforms emitted by inspiralling compact binaries: Ready-to-use gravitational waveforms[J/OL]. Phys Rev D, 2009, 79: 104023. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.104023>.
- [220] Königsdörffer, Christian and Gopakumar, Achamveedu. Post-Newtonian accurate parametric solution to the dynamics of spinning compact binaries in eccentric orbits: The leading order spin-orbit interaction[J/OL]. Phys Rev D, 2005, 71: 024039. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.024039>.
- [221] Keresztes, Zoltán and Mikóczi, Balázs and Gergely, László Á. Kepler equation for inspiralling compact binaries[J/OL]. Phys Rev D, 2005, 72: 104022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.104022>.
- [222] Teukolsky, Saul A. Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations[J/OL]. The Astrophysical Journal, 1973, 185: 635-648. DOI: [10.1086/152444](https://doi.org/10.1086/152444).
- [223] Press, William H. and Teukolsky, Saul A. Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr Metric[J/OL]. The Astrophysical Journal, 1973, 185: 649-674. DOI: [10.1086/152445](https://doi.org/10.1086/152445).
- [224] Teukolsky S A, Press W H. Perturbations of a rotating black hole. III. Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation.[J/OL]. The Astrophysical Journal, 1974, 193: 443-461. DOI: [10.1086/153180](https://doi.org/10.1086/153180).
- [225] Okounkova, Maria and Scheel, Mark A. and Teukolsky, Saul A. Evolving metric perturbations in dynamical Chern-Simons gravity[J/OL]. Phys Rev D, 2019, 99: 044019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.044019>.
- [226] Okounkova, Maria and others. Numerical relativity simulation of GW150914 beyond general relativity[J/OL]. Phys Rev D, 2020, 101: 104016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.104016>.
- [227] Okounkova, Maria and Isi, Maximiliano and Chatziioannou, Katerina and Farr, Will M. Grav-

itational wave inference on a numerical-relativity simulation of a black hole merger beyond general relativity[J/OL]. Phys Rev D, 2023, 107: 024046. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.024046>.

附录 A 关于论文中涉及的复杂表达式的补充材料

A.1 慢转动黑洞 $\mathcal{O}(\hat{\alpha}^2 \hat{\chi}^2)$ 阶扰动方程及其求解

将方程 (2.44) 记做 $G_{\mu\nu}^{(2,2)} = S_{\mu\nu}^{(2,2)}$, 分别都有 (tt) , (rr) , $(r\theta)$, $(\theta\theta)$, $(\varphi\varphi)$ 等五个非零分量。这些分量全都对应偶宇称扰动, 因此可以用七个偶宇称的张量球谐函数作为完备基底进行如下形式的分解,

$$S_{tt}^{(2,2)} = \sum_{\ell=0}^2 A_{\ell}(r) Y_{\ell 0}(\theta), \quad (\text{A.1a})$$

$$S_{rr}^{(2,2)} = \sum_{\ell=0}^2 B_{\ell}(r) Y_{\ell 0}(\theta), \quad (\text{A.1b})$$

$$S_{\theta\theta}^{(2,2)} = \sum_{\ell=0}^2 X_{\ell}(r) Y_{\ell 0}(\theta) + U_2(r) \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{20}(\theta), \quad (\text{A.1c})$$

$$S_{\varphi\varphi}^{(2,2)} = \sum_{\ell=0}^2 X_{\ell}(r) \sin^2 \theta Y_{\ell 0}(\theta) - U_2(r) \sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{20}(\theta), \quad (\text{A.1d})$$

$$S_{r\theta}^{(2,2)} = \sum_{\ell=1}^2 G_{\ell}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{\ell 0}(\theta). \quad (\text{A.1e})$$

其中展开系数可以在文献^[90]中找到。方程 (2.44) 左侧也可以做相同的展开, 从而得到径向函数 $F_{\ell}(r)$, $H_{\ell}(r)$ 和 $K_{\ell}(r)$ 的一组常微分方程

$$\frac{f^2(r)}{r} F_0'(r) + \frac{f(r)}{r^2} F_0(r) = A_0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{f^2(r)}{r} F_1'(r) + \frac{2f(r)}{r^2} F_1(r) = A_1 \quad (\text{A.2b})$$

$$\begin{aligned} \frac{f^2(r)}{r} F_2'(r) + \frac{4f(r)}{r^2} F_2(r) - f^2(r) K_2''(r) \\ - \frac{f(r)}{r} \left(3 - \frac{5\mathbf{m}}{r} \right) K_2'(r) + \frac{f(r)}{r^2} K_2(r) = A_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2c})$$

$$- \frac{1}{r^2 f(r)} F_0(r) - \frac{1}{r} H_0'(r) = B_0 \quad (\text{A.2d})$$

$$- \frac{1}{r^2 f(r)} F_1(r) - \frac{1}{r} H_1'(r) + \frac{1}{r^2 f(r)} H_1(r) = B_1 \quad (\text{A.2e})$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{r^2 f(r)} F_2(r) - \frac{1}{r} H_2'(r) + \frac{3}{r^2 f(r)} H_2(r) \\ + \frac{r - \mathbf{m}}{r^2 f(r)} K_2'(r) - \frac{2}{r^2 f(r)} K_2(r) = B_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2f})$$

$$- \frac{r - \mathbf{m}}{2} F_0'(r) - \frac{r^2 f(r)}{2} H_0''(r) - \frac{1}{2} (r + \mathbf{m}) H_0'(r) = \frac{r^2}{\sqrt{2}} X_0 \quad (\text{A.2g})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r-m}{2}F_1'(r) + \frac{1}{2}[H_1(r) - F_1(r)] \\
 & -\frac{r^2 f(r)}{2}H_1''(r) - \frac{r+m}{2}H_1'(r) = \frac{r^2}{\sqrt{2}}X_1,
 \end{aligned} \tag{A.2h}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{r-m}{2}F_2'(r) + \frac{3}{2}[H_2(r) - F_2(r)] - \frac{r^2 f(r)}{2}H_2''(r) \\
 & -\frac{r+m}{2}H_2'(r) + \frac{r^2 f(r)}{2}K_2''(r) + (r-m)K_2'(r) = \frac{r^2}{\sqrt{2}}X_2
 \end{aligned} \tag{A.2i}$$

$$\frac{1}{4}[H_2(r) - F_2(r)] = \frac{r^2}{4\sqrt{3}}U_2 \tag{A.2j}$$

$$\frac{r-m}{4r^2 f(r)}F_1(r) - \frac{1}{4}H_1'(r) - \frac{r-3m}{4r^2 f(r)}H_1(r) - \frac{1}{4}K_1'(r) = \frac{r}{2}G_1 \tag{A.2k}$$

$$\frac{r-m}{4r^2 f(r)}F_2(r) - \frac{1}{4}H_2'(r) - \frac{r-3m}{4r^2 f(r)}H_2(r) - \frac{1}{4}K_2'(r) = \frac{r^2}{4\sqrt{3}}G_2. \tag{A.2l}$$

其中共包含 12 个方程，涉及到 $H_{\ell=0,1,2}$, $F_{\ell=0,1,2}$ 和 $K_{\ell=2}$ 等 7 个未知函数。对 $\ell = 1$ 的方程，由于 $A_1 = B_1 = G_1 = X_1 = 0$ ，对应四个方程为齐次方程，于是得到 $H_1 = F_1 = 0$ 。 $\ell = 0$ 的 3 个方程给出 H_0, F_0 两个未知函数的解， $\ell = 2$ 的 5 个方程给出 H_2, F_2, K_2 等三个未知函数的解。它们依次是^[90]

$$F_0(r) = -\frac{25\sqrt{\pi}}{12r^4\beta} \frac{\pi}{f(r)} \left\{ 1 + 3\frac{m}{r} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] \right\}, \tag{A.3a}$$

$$H_0(r) = -\frac{5\sqrt{\pi}}{12r^4\beta} \frac{m}{r} \frac{\pi}{f(r)} \left\{ 1 + 100\frac{m}{r} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] \right\}, \tag{A.3b}$$

$$H_2(r) = \frac{201\sqrt{5\pi}}{140r^4\beta} \frac{r}{m} \frac{\pi}{f(r)} \left\{ 1 + \frac{m}{r} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] \right\}, \tag{A.3c}$$

$$F_2(r) = \frac{201\sqrt{5\pi}}{140r^4\beta} \frac{r}{m} \pi \left\{ 1 + \frac{1459}{603} \frac{m}{r} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] \right\}, \tag{A.3d}$$

$$K_2(r) = \frac{201\sqrt{5\pi}}{140r^4\beta} \frac{r}{m} \pi \left\{ 1 + \frac{1420}{603} \frac{m}{r} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{m}{r}\right)^2\right] \right\}. \tag{A.3e}$$

在求解上述非齐次方程时，均要求了径向函数的解在 $r \rightarrow \infty$ 区域快于 $1/r$ 衰减，这保证了我们所解出的黑洞是渐近平坦时空。

A.2 对旋转张量 $\Omega^{\mu\nu}$ 的变分

对旋转张量的变分 $\Delta\Omega^{\mu\nu}$ 是

$$\begin{aligned}
 \Delta\Omega^{\mu\nu} &= \Delta \left[e^{(\alpha)\mu} \frac{D}{D\tau} e_{(\alpha)}^\nu \right] = [\Delta e^{(\alpha)\mu}] u^\lambda \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \\
 &+ e^{(\alpha)\mu} (\Delta u^\lambda) \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu + e^{(\alpha)\mu} u^\lambda \Delta \left[\nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \right].
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

方程 (A.4) 第一项是

$$[\Delta e^{(\alpha)\mu}] u^\lambda \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu = e_{(\alpha)\lambda} [\Delta e^{(\alpha)\mu}] \Omega^{\lambda\nu} = \left[\Delta \Theta^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} (\delta_z g_{\alpha\beta}) \right] \Omega_\lambda^\nu, \quad (\text{A.5})$$

其中 $\Delta \Theta^{\mu\nu}$ 的定义在方程 (2.115)。方程 (A.4) 的第二项可以借助 (2.113) 给出

$$e^{(\alpha)\mu} (\Delta u^\lambda) \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu = e^{(\alpha)\mu} \left[\frac{D}{D\tau} (\delta z^\lambda) \right] \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \quad (\text{A.6})$$

方程 (A.4) 的第三项是

$$\begin{aligned} e^{(\alpha)\mu} u^\lambda \Delta \left[\nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \right] &= e^{(\alpha)\mu} u^\lambda \left\{ [\Delta, \nabla_\lambda] e_{(\alpha)}^\nu + \nabla_\lambda [\Delta e_{(\alpha)}^\nu] \right\} \\ &= e^{(\alpha)\mu} u^\lambda [\Delta, \nabla_\lambda] e_{(\alpha)}^\nu + u^\lambda \nabla_\lambda \left[e^{(\alpha)\mu} \Delta e_{(\alpha)}^\nu \right] - [\Delta e^{(\alpha)\nu}] u^\lambda \nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

其中 (A.7) 第一项中的对易关系计算为

$$[\Delta, \nabla_\lambda] e_{(\alpha)}^\nu = \left[(\delta_z \Gamma_{\lambda\gamma}^\nu) + (\delta z^\beta) R_{\gamma\beta\lambda}^\nu \right] e_{(\alpha)}^\gamma, \quad (\text{A.8})$$

方程 (A.7) 第二项可以代换为 $\Delta \Theta^{\mu\nu}$ ，而第三项恰好与第一项相同，于是得到

$$\begin{aligned} e^{(\alpha)\mu} u^\lambda \Delta \left[\nabla_\lambda e_{(\alpha)}^\nu \right] &= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g^{\gamma\nu} u^\lambda \left[\nabla_\beta (\delta_z g_{\lambda\gamma}) - \nabla_\gamma (\delta_z g_{\lambda\beta}) \right] + u^\lambda \delta z^\gamma R_{\lambda\gamma}^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{D}{D\tau} (\Delta \Theta^{\mu\nu}) - \left[\Delta \Theta^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} (\delta_z g_{\alpha\beta}) \right] \Omega_\lambda^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

综合方程 (A.5, A.6, A.9) 得到方程 (2.114)。最后方程 (2.112) 中的对 $g_{\mu\nu}$ 的导数由 (2.110) 给出。

A.3 频域波形中的振幅修正

A.3.1 广义相对论部分

广义相对论部分的修正振幅是

$$\bar{\mathcal{A}}_{1,2} = \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(-)} \left\{ -\frac{7}{96} e_0^3 \chi_f^{-19/6} \right\}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{2,2} = \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(-)} \left\{ -\frac{1}{16} e_0^4 \chi_f^{-38/9} \right\}, \quad (\text{A.10b})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{1,-2} = \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ -\frac{3}{4} e_0 \chi_f^{-19/18} + e_0^3 \left[\frac{10277}{2432} \chi_f^{-19/6} - \frac{3323}{2432} \chi_f^{-19/18} \right] \right\}, \quad (\text{A.10c})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{2,-2} = \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ 1 - \frac{277}{48} e_0^2 \chi_f^{-19/9} + e_0^4 \left[\frac{3260071}{87552} \chi_f^{-38/9} - \frac{920471}{43776} \chi_f^{-19/9} \right] \right\}, \quad (\text{A.10d})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{3,-2} = \mathcal{A}_3^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ \frac{9}{4} e_0 \chi_f^{-19/18} + e_0^3 \left[\frac{9969}{2432} \chi_f^{-19/18} - \frac{40863}{2432} \chi_f^{-19/6} \right] \right\}, \quad (\text{A.10e})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{4,-2} = \mathcal{A}_4^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ 4e_0^2 \chi_f^{-19/9} + e_0^4 \left[\frac{3323}{228} \chi_f^{-19/9} - \frac{1431}{38} \chi_f^{-38/9} \right] \right\}, \quad (\text{A.10f})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{5,-2} = \mathcal{A}_5^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ \frac{625}{96} e_0^3 \chi_f^{-19/6} \right\}, \quad (\text{A.10g})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{6,-2} = \mathcal{A}_6^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \left\{ \frac{81}{8} e_0^4 \chi_f^{-38/9} \right\}, \quad (\text{A.10h})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{1,0} = \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \left\{ -\frac{1}{2} e_0 \chi_f^{-19/18} + e_0^3 \left[\frac{9517}{3648} \chi_f^{-19/6} - \frac{3323}{3648} \chi_f^{-19/18} \right] \right\}, \quad (\text{A.10i})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{2,0} = \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \left\{ -\frac{1}{2} e_0^2 \chi_f^{-19/9} + e_0^4 \left[\frac{3305}{912} \chi_f^{-38/9} - \frac{3323}{1824} \chi_f^{-19/9} \right] \right\}, \quad (\text{A.10j})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{3,0} = \mathcal{A}_3^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \left\{ -\frac{9}{16} e_0^3 \chi_f^{-19/6} \right\}, \quad (\text{A.10k})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{4,0} = \mathcal{A}_4^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \left\{ -\frac{2}{3} e_0^4 \chi_f^{-38/9} \right\}. \quad (\text{A.10l})$$

其中定义了关于响应函数的系数

$$\mathcal{F}_d^{(0)} = \sin^2 \iota F_+, \quad \mathcal{F}_d^{(\pm)} = [(1 + \cos^2 \iota) F_+ \pm 2i \cos \iota F_\times] e^{\mp 2i\omega}. \quad (\text{A.11})$$

A.3.2 dCS 修正部分

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{1,2} = \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(-)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[e_0^3 \left(-\frac{2275}{9437184} \chi_f^{-9/2} + \frac{875}{3145728} \chi_f^{-19/6} \right) \right] \Delta^2 \right. \\ \left. + \left[e_0^3 \left(-\frac{287}{4608} \chi_f^{-9/2} - \frac{15941}{23040} \chi_f^{-19/6} + \frac{112}{15} \chi_f^{-3/2} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta \varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{2,2} = \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(-)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[e_0^4 \left(-\frac{325}{1179648} \chi_f^{-50/9} + \frac{725}{2359296} \chi_f^{-38/9} \right) \right] \Delta^2 \right. \\ \left. + \left[e_0^4 \left(-\frac{41}{576} \chi_f^{-50/9} - \frac{371}{960} \chi_f^{-38/9} + \frac{16}{5} \chi_f^{-23/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta \varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12b})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{1,-2} = \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[e_0 \left(-\frac{325}{393216} \chi_f^{-43/18} + \frac{475}{393216} \chi_f^{-19/18} \right) + e_0^3 \left(\frac{3340025}{239075328} \chi_f^{-9/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1034275}{88080384} \chi_f^{-19/6} - \frac{13338125}{5020581888} \chi_f^{-43/18} + \frac{83075}{37748736} \chi_f^{-19/18} \right) \right] \Delta^2 \\ + \left[e_0 \left(-\frac{41}{192} \chi_f^{-43/18} + \frac{623}{320} \chi_f^{-19/18} - \frac{384}{5} \chi_f^{11/18} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\ \left. + e_0^3 \left(\frac{421357}{116736} \chi_f^{-9/2} - \frac{1587076063}{69457920} \chi_f^{-19/6} - \frac{3366541}{2451456} \chi_f^{-43/18} + \frac{2070229}{583680} \chi_f^{-19/18} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{67768}{285} \chi_f^{-3/2} - \frac{13292}{95} \chi_f^{11/18} \right) (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta \varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12c})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{2,-2} = \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[-\frac{25}{49152} + e_0^2 \left(-\frac{90025}{7077888} \chi_f^{-31/9} + \frac{40175}{3538944} \chi_f^{-19/9} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + e_0^4 \left(\frac{1059523075}{6455033856} \chi_f^{-50/9} - \frac{11491459625}{90370473984} \chi_f^{-38/9} - \frac{2894366075}{45185236992} \chi_f^{-31/9} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{133501525}{3227516928} \chi_f^{-19/9} \right) \right] \Delta^2 + \left[\left(-\frac{29}{15} + \frac{256}{5} \chi_f^{5/3} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\ \left. + e_0^2 \left(-\frac{11357}{3456} \chi_f^{-31/9} + \frac{3680737}{293760} \chi_f^{-19/9} - \frac{7448}{45} \chi_f^{-4/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\ \left. + e_0^4 \left(\frac{133662911}{3151872} \chi_f^{-50/9} - \frac{686542948523}{5231278080} \chi_f^{-38/9} - \frac{598353517}{22063104} \chi_f^{-31/9} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{643741529}{14100480} \chi_f^{-19/9} + \left(\frac{157387}{135} \chi_f^{-23/9} - \frac{162827}{270} \chi_f^{-4/9} \right) (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta \varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12d})$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{3,-2} = & \mathcal{A}_3^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0 \left(\frac{325}{131072} \chi_f^{-43/18} - \frac{475}{131072} \chi_f^{-19/18} \right) + e_0^3 \left(-\frac{4426825}{79691776} \chi_f^{-9/2} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \frac{1496275}{29360128} \chi_f^{-19/6} + \frac{13338125}{1673527296} \chi_f^{-43/18} - \frac{83075}{12582912} \chi_f^{-19/18} \right) \Big] \Delta^2 \\
 & + \left[e_0 \left(\frac{41}{64} \chi_f^{-43/18} - \frac{2759}{960} \chi_f^{-19/18} + \frac{384}{5} \chi_f^{11/18} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\
 & + e_0^3 \left(-\frac{558461}{38912} \chi_f^{-9/2} + \frac{1981498061}{69457920} \chi_f^{-19/6} + \frac{3366541}{817152} \chi_f^{-43/18} - \frac{9168157}{1751040} \chi_f^{-19/18} \right. \\
 & \left. \left. \left. + \left(-\frac{107896}{285} \chi_f^{-3/2} + \frac{13292}{95} \chi_f^{11/18} \right) (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{4,-2} = & \mathcal{A}_4^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0^2 \left(\frac{325}{36864} \chi_f^{-31/9} - \frac{25}{2304} \chi_f^{-19/9} \right) + e_0^4 \left(-\frac{51675}{311296} \chi_f^{-50/9} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \frac{678425}{4358144} \chi_f^{-38/9} + \frac{10448975}{235339776} \chi_f^{-31/9} - \frac{83075}{2101248} \chi_f^{-19/9} \right) \Big] \Delta^2 \\
 & + \left[e_0^2 \left(\frac{41}{18} \chi_f^{-31/9} - \frac{101}{30} \chi_f^{-19/9} + \frac{512}{5} \chi_f^{-4/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right. \\
 & + e_0^4 \left(-\frac{6519}{152} \chi_f^{-50/9} + \frac{39932437}{813960} \chi_f^{-38/9} + \frac{2160121}{114912} \chi_f^{-31/9} - \frac{335623}{27360} \chi_f^{19/9} \right. \\
 & \left. \left. \left. + \left(-\frac{602032}{855} \chi_f^{-23/9} + \frac{106336}{285} \chi_f^{-4/9} \right) (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{5,-2} = & \mathcal{A}_5^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0^3 \left(\frac{203125}{9437184} \chi_f^{-9/2} - \frac{78125}{3145728} \chi_f^{-19/6} \right) \right] \Delta^2 \right. \\
 & \left. + \left[e_0^3 \left(-\frac{16025}{4608} \chi_f^{-19/6} + \frac{25625}{4608} \chi_f^{-9/2} + \frac{400}{3} \chi_f^{-3/2} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{6,-2} = & \mathcal{A}_6^{(0)} \mathcal{F}_d^{(+)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0^4 \left(\frac{2925}{65536} \chi_f^{-50/9} - \frac{6525}{131072} \chi_f^{-38/9} \right) \right] \Delta^2 \right. \\
 & \left. + \left[e_0^4 \left(-\frac{63}{20} + \frac{369}{32} \chi_f^{-4/3} + \frac{864}{5} \chi_f^{-23/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{1,0} = & \mathcal{A}_1^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0 \left(-\frac{325}{589824} \chi_f^{-43/18} + \frac{475}{589824} \chi_f^{-19/18} \right) + e_0^3 \left(\frac{3093025}{358612992} \chi_f^{-9/2} \right. \right. \right. \\
 & - \left. \frac{929275}{132120576} \chi_f^{-19/6} - \frac{13338125}{7530872832} \chi_f^{-43/18} + \frac{83075}{56623104} \chi_f^{-19/18} \right) \Big] \Delta^2 \\
 & + \left[e_0 \left(-\frac{41}{288} \chi_f^{-43/18} + \frac{473}{288} \chi_f^{-19/18} \right) + e_0^3 \left(\frac{390197}{175104} \chi_f^{-9/2} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{2356153}{408576} \chi_f^{-19/6} - \frac{3366541}{3677184} \chi_f^{-43/18} + \frac{1571779}{525312} \chi_f^{-19/18} \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{A}_{2,0} = & \mathcal{A}_2^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \frac{\tilde{u}_f^4}{\sqrt{4/5}} \left\{ \left[e_0^2 \left(-\frac{325}{294912} \chi_f^{-31/9} + \frac{25}{18432} \chi_f^{-19/9} \right) + e_0^4 \left(\frac{1074125}{67239936} \chi_f^{-50/9} \right. \right. \right. \\
 & - \left. \frac{13303375}{941359104} \chi_f^{-38/9} - \frac{10448975}{1882718208} \chi_f^{-31/9} + \frac{83075}{16809984} \chi_f^{-19/9} \right) \Big] \Delta^2 \\
 & + \left[e_0^2 \left(-\frac{41}{144} \chi_f^{-31/9} + \frac{305}{144} \chi_f^{-19/9} \right) + e_0^4 \left(\frac{135505}{32832} \chi_f^{-50/9} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1410677}{114912} \chi_f^{-38/9} - \frac{2160121}{919296} \chi_f^{-31/9} + \frac{1013515}{131328} \chi_f^{-19/9} \right) \right] \delta\varpi \right\}, \tag{A.12j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{3,0} = & \mathcal{A}_3^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[e_0^3 \left(-\frac{975}{524288} \chi_f^{-9/2} + \frac{1125}{524288} \chi_f^{-19/6} \right) \right] \Delta^2 \right. \\ & \left. + \left[e_0^3 \left(-\frac{123}{256} \chi_f^{-9/2} + \frac{747}{256} \chi_f^{-19/6} + \frac{864}{5} \chi_f^{-23/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12k})$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{4,0} = & \mathcal{A}_4^{(0)} \mathcal{F}_d^{(0)} \frac{\tilde{u}_f^4}{v^{4/5}} \left\{ \left[e_0^4 \left(-\frac{325}{110592} \chi_f^{-50/9} + \frac{725}{221184} \chi_f^{-38/9} \right) \right] \Delta^2 \right. \\ & \left. + \left[e_0^4 \left(\frac{221}{54} \chi_f^{-38/9} - \frac{41}{54} \chi_f^{-50/9} + \frac{864}{5} \chi_f^{-23/9} (2\pi \mathcal{M} F_0)^{5/3} \ell_c \right) \right] \delta\varpi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.12l})$$

其中定义了系数

$$\mathcal{A}_n^{(0)} \equiv -\sqrt{\frac{5}{96}} \pi^{-2/3} \frac{\mathcal{M}^{5/6}}{R} f^{-7/6} \left(\frac{n}{2} \right)^{2/3}. \quad (\text{A.13})$$

A.4 进动双星引力和标量辐射表达式中涉及的系数

A.4.1 波形 $\xi_{+,x}^{(0)}$ 中涉及系数的表达式

$$\begin{aligned} \Sigma_{(0)}^+ = & \frac{1}{2} \frac{\xi}{1-e_r^2} e_r^2 \sin^2 i \cos V + \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ -\frac{1}{2} e_r^2 \cos 2(\beta V + \alpha + \omega + Y) \right. \\ & - \frac{5}{4} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] - \cos[2(1+\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \\ & \left. - \frac{1}{4} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right\} (1 + \cos^2 i), \end{aligned} \quad (\text{A.14a})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{(1/2)}^+ = & \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ 2e_r^2 \cos(\beta V + \alpha) \cos(\beta V + \alpha + \omega + Y) + e_r \cos(\omega + Y) \right. \\ & + \frac{5}{2} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] + 2 \cos[2(1+\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] \\ & \left. + \frac{1}{2} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] \right\} \sin i \cos i, \end{aligned} \quad (\text{A.14b})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{(1)}^+ = & -\frac{3}{2} \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ e_r^2 \cos^2(\beta V + \alpha) + \frac{1}{2} e_r \cos V + \frac{5}{4} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2\alpha] \right. \\ & \left. + \cos[2(1+\beta)V + 2\alpha] + \frac{1}{2} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2\alpha] \right\} \sin^2 i \\ & + \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ \frac{1}{2} e_r^2 \cos(\beta V + \alpha) \cos[\beta V + \alpha + 2(\omega + Y)] + \frac{1}{4} e_r \cos 2(\omega + Y) \cos V \right. \\ & + \frac{5}{8} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] + \frac{1}{2} \cos[2(1+\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \\ & \left. + \frac{1}{8} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right\} (1 + \cos^2 i), \end{aligned} \quad (\text{A.14c})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{(3/2)}^+ = & \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ -e_r^2 \cos^2(\beta V + \alpha) - \frac{1}{2} e_r \cos V - \frac{5}{4} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2\alpha] \right. \\ & \left. - \cos[2(1+\beta)V + 2\alpha] - \frac{1}{4} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2\alpha] \right\} \sin i \cos i \cos(\omega + Y), \end{aligned} \quad (\text{A.14d})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{(2)}^+ = & -\frac{1}{16} \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ e_r^2 \sin 2(\beta V + \alpha) + \frac{5}{2} e_r \sin[(1+2\beta)V + 2\alpha] \right. \\ & \left. + 2 \sin[2(1+\beta)V + 2\alpha] + \frac{1}{2} e_r \sin[(3+2\beta)V + 2\alpha] \right\} (1 + \cos^2 i) \sin 2(\omega + Y), \end{aligned} \quad (\text{A.14e})$$

$$\Sigma_{(0)}^{\times} = \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ -e_r^2 \sin 2(\beta V + \alpha + \omega + Y) - \frac{5}{2} e_r \sin[(1+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right. \\ \left. - 2 \sin[2(1+\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] - \frac{1}{2} e_r \sin[(3+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right\} \cos \iota, \quad (\text{A.15a})$$

$$\Sigma_{(1/2)}^{\times} = \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ 2e_r^2 \cos(\beta V + \alpha) \sin(\beta V + \alpha + \omega + Y) \right. \\ \left. + e_r \cos V \sin(\omega + Y) + \frac{5}{2} e_r \sin[(1+2\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] \right. \\ \left. + 2 \sin[2(1+\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] + \frac{1}{2} e_r \sin[(3+2\beta)V + 2\alpha + \omega + Y] \right\} \sin \iota, \quad (\text{A.15b})$$

$$\Sigma_{(1)}^{\times} = \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ e_r^2 \cos(\beta V + \alpha) \sin[\beta V + \alpha + 2(\omega + Y)] + \frac{1}{2} e_r \cos V \sin 2(\omega + Y) \right. \\ \left. + \frac{5}{4} e_r \sin[(1+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] + \sin[2(1+\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} e_r \sin[(3+2\beta)V + 2(\alpha + \omega + Y)] \right\} \cos \iota, \quad (\text{A.15c})$$

$$\Sigma_{(3/2)}^{\times} = \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ -e_r^2 \cos^2(\beta V + \alpha) + \frac{1}{2} e_r \cos V - \frac{5}{4} e_r \cos[(1+2\beta)V + 2\alpha] \right. \\ \left. - \cos[2(1+\beta)V + 2\alpha] - \frac{1}{4} e_r \cos[(3+2\beta)V + 2\alpha] \right\} \sin \iota \sin(\omega + Y), \quad (\text{A.15d})$$

$$\Sigma_{(2)}^{\times} = \frac{1}{4} \frac{\xi}{1-e_r^2} \left\{ \frac{1}{2} e_r^2 \sin 2(\beta V + \alpha) + \frac{5}{4} e_r \sin[(1+2\beta)V + 2\alpha] \right. \\ \left. + \sin[2(1+\beta)V + 2\zeta] + \frac{1}{4} e_r \sin[(3+2\beta)V + 2\alpha] \right\} \cos \iota \cos 2(\omega + Y). \quad (\text{A.15e})$$

A.4.2 自旋-自旋耦合项中的系数 $\mathcal{A}_k^{+, \times}, \mathcal{B}_k^{+, \times}$

在后续的一系列表达式中，我们将使用如下简记符号，

$$\tilde{\alpha} \equiv \alpha + \omega + Y. \quad (\text{A.16})$$

这些系数依次是

$$\mathcal{A}_0^+ = -\frac{1}{2} \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 [2(2+3e_r^2) \sin(\psi_2 + \tilde{\alpha}) + 3e_r^2 \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha})] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\ - \frac{1}{96} \left\{ 2 \left[16(3+5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\psi}) + 2e_r^2(21-4e_r^2) \cos 2(\beta V + \tilde{\alpha}) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\ \left. + \left[32e_r^2 \cos 2(\beta V - \tilde{\psi}) + 8(12+11e_r^2+2e_r^4) \cos \Delta\psi \right] \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\ + \frac{1}{12} e_r^2 \left\{ (3-4e_r^2) \cos 2(\beta V + \tilde{\alpha})(1 + \cos^2 \iota) - 2(7-2e_r^2) \sin^2 \iota \right\} \cos \kappa_1 \cos \kappa_2, \quad (\text{A.17a})$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^+ &= -\frac{1}{2}e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \left[3(4 + e_r^2) \sin(\psi_2 + \tilde{\alpha}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(3 + e_r^2) \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{96}e_r \left\{ - \left[(304 + 66e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\tilde{\psi}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 75e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) + 56 \cos(2\tilde{\alpha} + 2\beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - \left[8(7 + 3e_r^2) \cos 2(\beta V - \tilde{\psi}) + 60(4 + e_r^2) \cos \Delta\psi \right] \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{12}e_r \left\{ 2(11 + 6e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) + 3(4 + e_r^2) \sin^2 \iota \right\} \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.17b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2^+ &= - \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \left[3e_r^2 \sin(\psi_2 + \tilde{\alpha}) + (2 + 3e_r^2) \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left\{ e_r^2 \left[- 34 \cos(2\tilde{\alpha} + 2\tilde{\psi}) + 73 \cos(2\tilde{\alpha} + 4\beta V - 2\tilde{\psi}) + 6 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - \left[8(1 + 2e_r^2) \cos 2(\beta V - \tilde{\psi}) + 30e_r^2 \cos \Delta\psi \right] \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ (4 + 7e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) + e_r^2 \sin^2 \iota \right\} \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.17c}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_3^+ &= -\frac{1}{4}e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \left[2e_r^2 \sin(\psi_2 + \tilde{\alpha}) + 3(4 + e_r^2) \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{96}e_r \left\{ \left[- 22e_r^2 \cos(2\tilde{\alpha} + 2\tilde{\psi}) + 17(24 + 5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(4 - 5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - \left[2(28 + 9e_r^2) \cos 2(\beta V - \tilde{\psi}) - 20e_r^2 \cos \Delta\psi \right] \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{24}e_r \left\{ (76 + 13e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) + 2e_r^2 \sin^2 \iota \right\} \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.17d}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_4^+ &= -\frac{3}{2}e_r^2 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{48} \left\{ \left[48(2 + 3e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) - 10e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - 16e_r^2 \cos(2\beta V - 2\tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 - \frac{13}{12}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.17e}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_5^+ &= -\frac{1}{4}e_r^3 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{96}e_r \left\{ \left[(232 + 57e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) - 6e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - 6e_r^2 \cos 2(\beta V - \tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 - \frac{1}{8}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.17f}$$

$$\mathcal{A}_6^+ = \frac{25}{24}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi})(1 + \cos^2 \iota) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.17g}$$

$$\mathcal{A}_7^+ = \frac{5}{32}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi})(1 + \cos^2 \iota) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.17h}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1^+ &= -\frac{1}{2}e_r(6 + e_r^2) \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad - \frac{1}{96}e_r \left\{ \left[-4(4 - 9e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\psi}) + 75e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 4(14 - 15e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. - 4(14 + 3e_r^2) \sin 2(\beta V - \tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad + \frac{1}{12}e_r(22 + 21e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.18a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_2^+ &= -(2 + 3e_r^2) \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left\{ -e_r^2 \left[4 \sin 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\psi}) + 73 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 6 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) + 8(1 + 2e_r^2) \sin(2\beta V - 2\tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(4 + 7e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.18b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_3^+ &= -\frac{3}{4}e_r(4 + e_r^2) \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad - \frac{1}{96}e_r \left\{ \left[4e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \tilde{\psi}) + 17(5e_r^2 + 24) \sin(2\tilde{\alpha} + 4\beta V - 2\tilde{\psi}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(4 - 5e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. + 2(28 + 9e_r^2) \sin 2(\beta V - \tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad + \frac{1}{24}e_r(76 + 13e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.18c}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_4^+ &= -\frac{3}{2}e_r^2 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{48} \left\{ \left[-48(2 + 3e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) + 10e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. + 16e_r^2 \sin 2(\beta V - \tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 + \frac{13}{12}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.18d}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_5^+ &= -\frac{1}{4}e_r^3 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(2\beta V - \psi_2 + \tilde{\alpha}) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{96} \left\{ e_r \left[-(232 + 57e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi}) + 6e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. + 6e_r^3 \sin(2\beta V - 2\tilde{\psi}) \sin^2 \iota \right\} \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 + \frac{1}{8}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.18e}$$

$$\mathcal{B}_6^+ = -\frac{25}{24}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi})(1 + \cos^2 \iota) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.18f}$$

$$\mathcal{B}_7^+ = -\frac{5}{32}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \tilde{\psi})(1 + \cos^2 \iota) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2. \tag{A.18g}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_0^\times &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \left[2(2 + 3e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + \psi_1) + 3e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad - \frac{1}{24} \left\{ 16(3 + 5e_r^2) \sin 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) + 2(21 - 4e_r^2) e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad + \frac{1}{6}e_r^2(3 - 4e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1^\times &= \frac{1}{2}e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 [3(4 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + \psi_1) + 2(3 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1)] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad - \frac{1}{48}e_r \left\{ \left[-75e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) + (304 + 66e_r^2) \sin 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 56 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right] \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{3}e_r(11 + 6e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2^\times &= \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 [3e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + \psi_1) + (2 + 3e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1)] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad + \frac{1}{12}e_r^2 \left\{ -34 \sin 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) + 73 \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &\quad \left. + 6 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - (4 + 7e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19c}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_3^\times &= \frac{1}{4}e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 [2e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + \psi_1) + 3(4 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1)] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad + \frac{1}{48}e_r \left\{ -22e_r^2 \sin 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) + 17(24 + 5e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &\quad \left. + 2(4 - 5e_r^2) \cos \Delta\psi \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{12}e_r(76 + 13e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19d}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_4^\times &= \frac{3}{2}e_r^2 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad + \left\{ 2(2 + 3e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) - \frac{5}{12}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{13}{6}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19e}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_5^\times &= \frac{1}{4}e_r^3 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad + \frac{1}{48}e_r \left\{ (232 + 57e_r^2 + 232) \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &\quad \left. - 6e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{4}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.19f}$$

$$\mathcal{A}_6^\times = \frac{25}{12}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.19g}$$

$$\mathcal{A}_7^\times = \frac{5}{16}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.19h}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1^\times &= -\frac{1}{2}e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 (6 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &\quad - \frac{1}{48}e_r \left\{ 4(4 - 9e_r^2) \cos 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) - 75e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &\quad \left. + 4(14 - 15e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &\quad - \frac{1}{6}e_r(22 + 21e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.20a}$$

$$\begin{aligned}
 B_2^\times &= -\left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 (2 + 3e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &+ \frac{1}{12} e_r^2 \left\{ 4 \cos 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) + 73 \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &+ 6 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \left. \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &- (4 + 7e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.20b}$$

$$\begin{aligned}
 B_3^\times &= -\frac{3}{4} e_r \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 (4 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &+ \frac{1}{48} e_r \left\{ 4e_r^2 \cos 2(\tilde{\psi} + \tilde{\alpha}) + 17(24 + 5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \right. \\
 &+ 2(4 - 5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \left. \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &- \frac{1}{12} e_r (76 + 13e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.20c}$$

$$\begin{aligned}
 B_4^\times &= -\frac{3}{2} e_r^2 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &+ \left\{ 2(2 + 3e_r^2 + 2) \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) - \frac{5}{12} e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &- \frac{13}{6} e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.20d}$$

$$\begin{aligned}
 B_5^\times &= -\frac{1}{4} e_r^3 \left\{ \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_1) + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \sin \iota \\
 &+ \frac{1}{48} e_r \left\{ (232 + 57e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) - 6e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \Delta\psi \right\} \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \\
 &- \frac{1}{4} e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \cos \kappa_1 \cos \kappa_2,
 \end{aligned} \tag{A.20e}$$

$$B_6^\times = \frac{25}{12} e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2, \tag{A.20f}$$

$$B_7^\times = \frac{5}{16} e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\psi} + 2\beta V) \cos \iota \sin \kappa_1 \sin \kappa_2. \tag{A.20g}$$

A.4.3 单极-四极耦合项中的系数 $C_k^{+, \times}$, $D_k^{+, \times}$

$$\begin{aligned}
 C_{A,0}^+ &= -\frac{1}{16} e_r^2 \left\{ (3 - 4e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) (1 + \cos^2 \iota) - 2(7 - 2e_r^2) \sin^2 \iota \right\} \\
 &+ \frac{1}{32} \left\{ \left[3e_r^2 (15 - 4e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) + 8(3 + 5e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &- \left[26e_r^2 \cos 2(\beta V - \psi_A) + 6(8 + 5e_r^2 + 2e_r^4) \right] \sin^2 \iota \left. \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &+ \frac{3}{8} \left[2(2 + 3e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 3e_r^2 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21a}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,1}^+ &= \frac{1}{16}e_r \left\{ 2(11 + 6e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 i) + 3(4 + e_r^2) \sin^2 i \right\} \\
 &+ \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[(304 + 66e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) - 63e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \right. \\
 &\left. \left. + 24(1 - 2e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 i) \right. \\
 &\left. + \left[432 + 108e_r^2 + 8(25 + 9e_r^2) \cos(2\beta V - 2\psi_A) \right] \sin^2 i \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &+ \frac{3}{8}e_r \left[3(4 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 2(3 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] \sin i \cos i \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21b}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,2}^+ &= \frac{3}{8} \left\{ (4 + 7e_r^2) \cos(2(\tilde{\alpha} + \beta V))(1 + \cos^2 i) + e_r^2 \sin^2 i \right\} \\
 &+ \frac{1}{32} \left\{ \left[34e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) - 55e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \right. \\
 &\left. \left. - 6(4 + 9e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 i) \right. \\
 &\left. - \left[54e_r^2 + 4(8 + 13e_r^2) \cos 2(\beta V - \psi_A) \right] \sin^2 i \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &+ \frac{3}{4} \left[3e_r^2 \sin(\tilde{\alpha} + \psi_A) + (2 + 3e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] \sin i \cos i \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21c}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,3}^+ &= \frac{1}{32} \left\{ e_r(76 + 13e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 i) + 2e_r^3 \sin^2 i \right\} \\
 &+ \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[22e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) - 49e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) - 6(28 + e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right. \right. \\
 &\left. \left. + 264 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] (1 + \cos^2 i) \right. \\
 &\left. - \left[36e_r^2 + 2(100 + 27e_r^2) \cos(2\beta V - 2\psi_A) \right] \sin^2 i \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &+ \frac{3}{16}e_r \left[2e_r^2 \sin(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 3(4 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] \sin i \cos i \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21d}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,4}^+ &= \frac{13}{16}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 i) \\
 &- \frac{1}{32} \left\{ 3 \left[4(2 + 3e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) + e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 i) \right. \\
 &\left. - 26e_r^2 \cos 2(\beta V - \psi_A) \sin^2 i \right\} \sin^2 \kappa_A + \frac{9}{8}e_r^2 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin i \cos i \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21e}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,5}^+ &= \frac{3}{32}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 i) \\
 &+ \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[6e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) - (88 + 21e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] (1 + \cos^2 i) \right. \\
 &\left. + 18e_r^2 \cos(2\beta V - 2\psi_A) \sin^2 i \right\} \sin^2 \kappa_A + \frac{3}{16}e_r^3 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin i \cos i \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.21f}$$

$$C_{A,6}^+ = -\frac{7}{32}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)(1 + \cos^2 i) \sin^2 \kappa_A, \tag{A.21g}$$

$$C_{A,7}^+ = -\frac{3}{128}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)(1 + \cos^2 i) \sin^2 \kappa_A, \tag{A.21h}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,1}^+ &= -\frac{1}{16}e_r(22 + 21e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \\
 &\quad - \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[4(4 - 9e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) - 63e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 12(2 - 17e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 \iota) + 4(50 + 9e_r^2) \sin 2(\beta V - \psi_A) \sin^2 \iota \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{3}{8}e_r(6 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.22a}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,2}^+ &= -\frac{3}{8}(4 + 7e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \\
 &\quad + \frac{1}{32} \left\{ \left[4e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 55e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 6(4 + 9e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 \iota) - 4(13e_r^2 + 8) \sin(2\beta V - 2\psi_A) \sin^2 \iota \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{3}{4}(2 + 3e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.22b}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,3}^+ &= -\frac{1}{32}e_r(76 + 13e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \\
 &\quad + \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[4e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) + (264 + 49e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 6(28 + e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 \iota) - 2(100 + 27e_r^2) \sin 2(\beta V - \psi_A) \sin^2 \iota \right\} \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{9}{16}e_r(4 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.22c}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,4}^+ &= -\frac{13}{16}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \\
 &\quad + \frac{1}{32} \left\{ + 3 \left[4(2 + 3e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) + e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right] (1 + \cos^2 \iota) \sin^2 \kappa_A \right. \\
 &\quad \left. - 26e_r^2 \sin 2(\beta V - \psi_A) \sin^2 \iota \right\} \cos^2 \kappa_A + \frac{9}{8}e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.22d}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,5}^+ &= -\frac{3}{32}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V)(1 + \cos^2 \iota) \\
 &\quad - \frac{1}{128}e_r \left\{ \left[6e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) - (88 + 21e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right] (1 + \cos^2 \iota) \right. \\
 &\quad \left. + 18e_r^2 \sin 2(\beta V - \psi_A) \sin^2 \iota \right\} \sin^2 \kappa_A + \frac{3}{16}e_r^3 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \cos \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.22e}$$

$$D_{A,6}^+ = \frac{7}{32}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)(1 + \cos^2 \iota) \sin^2 \kappa_A, \tag{A.22f}$$

$$D_{A,7}^+ = \frac{3}{128}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)(1 + \cos^2 \iota) \sin^2 \kappa_A, \tag{A.22g}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,0}^\times &= -\frac{1}{8}e_r^2(3 - 4e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{16} \left\{ 3e_r^2(15 - 4e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) + 8(3 + 5e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad - \frac{3}{8} \left\{ 2(2 + 3e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 3e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right\} \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23a}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,1}^{\times} &= \frac{1}{4}e_r(11 + 6e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \\
 &\quad - \frac{1}{64}e_r \left\{ -2(152 + 33e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 63e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. - 24(1 - 2e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad - \frac{3}{8}e_r \left\{ 3(4 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 2(3 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right\} \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23b}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,2}^{\times} &= \frac{3}{4}(4 + 7e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \\
 &\quad - \frac{1}{16} \left\{ (55e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. - 34e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 6(4 + 9e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad - \frac{3}{4} \left\{ 3e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + \psi_A) + (3e_r^2 + 2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right\} \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23c}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,3}^{\times} &= \frac{1}{16}e_r(76 + 13e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \\
 &\quad + \frac{1}{64}e_r \left\{ 22e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) - (264 + 49e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. - 6(28 + e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad - \frac{3}{16}e_r \left\{ 2e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 3(4 + e_r^2) \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right\} \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23d}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,4}^{\times} &= \frac{13}{8}e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota - \frac{3}{16} \left\{ 4(2 + 3e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. + e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A - \frac{9}{8}e_r^2 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23e}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,5}^{\times} &= \frac{3}{16}e_r^3 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota - \frac{1}{64}e_r \left\{ (88 + 21e_r^2) \sin 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. - 6e_r^2 \sin 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A - \frac{3}{16}e_r^3 \cos(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.23f}$$

$$C_{A,6}^{\times} = -\frac{7}{16}e_r^2 \sin(2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)) \cos \iota \sin^2 \kappa_A, \tag{A.23g}$$

$$C_{A,7}^{\times} = -\frac{3}{64}e_r^3 \sin(2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A)) \cos \iota \sin^2 \kappa_A, \tag{A.23h}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,1}^{\times} &= \frac{1}{8}e_r(22 + 21e_r^2) \cos(2(\tilde{\alpha} + \beta V)) \cos \iota - \frac{1}{64}e_r \left\{ 4(4 - 9e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. + 63e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) - 12(2 - 17e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{3}{8}e_r(6 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.24a}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,2}^{\times} &= \frac{3}{4}(4 + 7e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota \\
 &\quad - \frac{1}{16} \left\{ 4e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) + 55e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) + 6(4 + 9e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{3}{4}(2 + 3e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.24b}$$

$$\begin{aligned}
 D_{A,3}^{\times} &= \frac{1}{16}e_r(76 + 13e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota - \frac{1}{64}e_r \left\{ 4e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \psi_A) \right. \\
 &\quad \left. + (264 + 49e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) + 6(28 + e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A \\
 &\quad + \frac{9}{16}e_r(4 + e_r^2) \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A,
 \end{aligned} \tag{A.24c}$$

$$D_{A,4}^{\times} = \frac{13}{8}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota - \frac{3}{16} \left\{ 4(2 + 3e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\ \left. + e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A + \frac{9}{8}e_r^2 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A, \quad (\text{A.24d})$$

$$D_{A,5}^{\times} = \frac{3}{16}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \cos \iota - \frac{1}{64}e_r \left\{ (88 + 21e_r^2) \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \right. \\ \left. - 6e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + \beta V) \right\} \cos \iota \sin^2 \kappa_A + \frac{3}{16}e_r^3 \sin(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \sin \iota \sin \kappa_A \cos \kappa_A, \quad (\text{A.24e})$$

$$D_{A,6}^{\times} = -\frac{7}{16}e_r^2 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \cos \iota \sin^2 \kappa_A, \quad (\text{A.24f})$$

$$D_{A,7}^{\times} = -\frac{3}{64}e_r^3 \cos 2(\tilde{\alpha} + 2\beta V - \psi_A) \cos \iota \sin^2 \kappa_A. \quad (\text{A.24g})$$

致 谢

值此毕业之际，首先应当感谢我的导师——赵文老师对我科研工作的悉心指导。感谢您在研究生复试考场上捞我上岸，感谢您提供给我一个有趣而深刻的研究课题，这极大地影响了我的学术研究兴趣，我至今仍然在这个领域寻求进取。感谢中国留学基金委对我联合培养项目的资助。感谢日本京都大学的田中贵浩教授在我交流访学期间对我学术和生活的帮助，热烈和自由的讨论让我感受到学术研究的快乐。感谢中国科大天文学系的范璐璐老师、蔡一夫老师、李剑老师、蔡振翼老师、周楠老师、陆山老师和邢蔚然老师在学业和生活上的帮助。感谢浙江工业大学的朱涛老师、云南大学的尔欣中老师、武汉大学的范锡龙、侯绍齐老师，北京大学的陈弦老师，南京大学的何建华老师，山东大学的张宏、鲍守山老师，紫金山天文台的李国亮老师，弗吉尼亚大学的 **Kent Yagi**、谢菲尔德大学的 **Sam Dolan**，京都大学的向山信治教授，我在学术上遇到的诸多困难有赖于你们的帮助才得以解决。感谢山东大学（威海）空间科学与物理学院的宋红强老师、高建华老师、亓斌老师、曹晨老师、王守宇老师、李凯老师、姜云国老师等，是母校的教育和培养给予我学术研究的根基，可以支撑我走到今天、走向未来。在此祝愿山东大学天文学系越来越好。

感谢父母对我学业和人生选择的全力支持。无论自己的命运走向何方，家庭的印记都将伴我终生。感谢人生二十多年来伴我成长的师长。感谢蒋效铭、张丹丹、周建召、曹政、张元可，肖雨辰、王嘉宁等各位本科同学，研究生课题组的刘谈、王一帆、王博、牛睿、乔进等各位师兄，以及刘峥岩、窦嘉政等、周骢、贺雷同学在学术和生活上给予的帮助和支持。感谢蒋翱翔、陈李俊、陈明静、张东东、朱豪富、刘威、张聪聪、吕澈秋、叶翮、洪慧和钟逸威等天文系同学长期以来的友好相处。感谢宋钊、孙明昊、孙佩发、崔溟天和贾乾兹等十多年的朋友。感谢郭潇、陈然、王浩、江新月、单熙凯等学术上的合作伙伴。感谢陶柏钧、陈世江、林哲宇、张夏尔、吴薇羽等天文爱好者协会和共同创建“蜗壳天文”的同学们。感谢京都大学喜友名正树、柄本耀介、**Artigas Danilo**、**Mostafizur Rahman**、**Daniel Panizo**、窪田圭一郎和笕嵩文等。人生的道路有赖于朋友们生活中相处的点滴，祝大家前程似锦、未来可期。

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. **Zhao Li**, Xiao Guo, Tan Liu, Tao Zhu, Wen Zhao, Schwarzschild lensing from geodesic deviation, JCAP01(2025)092.
2. **Zhao Li**, Jin Qiao, Tan Liu, Rui Niu, Shaoqi Hou, Tao Zhu and Wen Zhao, Gravitational Radiation from Eccentric Binary Black Hole System in Dynamical Chern-Simons Gravity, JCAP05(2024)073.
3. **Zhao Li**, Jin Qiao, Tan Liu, Tao Zhu and Wen Zhao, Gravitational Waveform and Polarization from Binary Black Hole Inspiral in Dynamical Chern-Simons Gravity: From Generation to Propagation, JCAP04(2023)006.
4. **Zhao Li**, Jin Qiao, Wen Zhao and Xinzhong Er, Gravitational Faraday rotation of gravitational waves by a Kerr black hole, JCAP10(2022)095.
5. Hao Wang, Yuan-Chuan Zou, Qing-Wen Wu, Xiaolin Liu, **Zhao Li**, A complete waveform comparison of post-Newtonian and numerical relativity in eccentric orbits, Phys. Rev. D 111, 064018.
6. Ran Chen, **Zhao Li**, Yinjie Li, Yiyang Wang, Rui Niu, Wen Zhao, Yizhong Fan, Forecast analysis of astrophysical stochastic gravitational wave background beyond general relativity: a case study on Brans-Dicke gravity, JCAP02(2025)008.
7. Xinyue Jiang, Xin Ren, **Zhao Li**, Yifu Cai and Xinzhong Er, Exploring $f(T)$ Gravity via strongly lensed fast radio bursts, MNRAS, Volume 528, Issue 2, February 2024, Pages 1965–1978.
8. Jin Qiao, **Zhao Li**, Ran Ji, Tao Zhu, Guoliang Li, Wen Zhao and Jiming Chen, Constraints on the ghost-free parity-violating gravity from Laser-ranged Satellites, JCAP10(2023)066.
9. Jin Qiao, **Zhao Li**, Tao Zhu, Ran Ji, Guoliang Li and Wen Zhao, Testing parity symmetry of gravity with gravitational waves, Frontiers in Astronomy and Space Sciences, 9, 1109086.

待发表论文

1. **Zhao Li** and Wen Zhao, Dynamics and gravitational radiation of binaries with spin precession and eccentricity in dynamical Chern-Simons gravity, arxiv.2504.13450.